

MPI-PAE/PTh 68/87

August 1987

**Der nichtlineare Renormierungsgruppenfluß des Standardmodells der
elektroschwachen Wechselwirkung und einiger Erweiterungen**

Dissertation der Fakultät für Physik der
Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Manfred Lindner

München

München, den 19. Mai 1987

**Der nichtlineare Renormierungsgruppenfluß des Standardmodells der
elektroschwachen Wechselwirkung und einiger Erweiterungen**

Dissertation der Fakultät für Physik der
Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Manfred Lindner

München

München, den 19. Mai 1987

Betreuer: Dr. A. Buras

1. Gutachter: Professor Dr. H.P. Dürr

2. Gutachter: Professor Dr. H. Fritzsche

Tag der mündlichen Prüfung: 27. Juli 1987

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird der Renormierungsgruppentransport von Parametern im Standardmodell und einigen naheliegenden Erweiterungen systematisch untersucht. Dabei wird besonders auf die Nichtlinearitäten geachtet, die bisher zu wenig Beachtung fanden.

Die Motivation für die Analyse ist ein scheinbarer Zusammenhang der zu erklärenden Parameter mit den Strukturen der Renormierungsgruppengleichungen. Versucht man die unabhängigen Eichkopplungen durch Renormierungseffekte aus einer einzigen Kopplung zu erklären, so führt dies zu hohen Skalen, welche fast die Größenordnung der für die Gravitation relevanten Planck-Skala erreichen. Da Massen vermutlich in der Gravitation fundamental erklärt werden, ist die Evolution der Massen zu hohen Skalen die notwendige Vorarbeit zur Erklärung. Für leichte Quarks erhält man aus dem linearen Teil der Renormierungsgruppengleichungen einen universellen Skalierungsfaktor für alle Massen eines Typs. Da mittlerweile schwere Quarks sehr realistisch sind, werden die Nichtlinearitäten für die Evolution wichtig, wodurch die Massen und Mischungen sich sehr komplex entwickeln. Existierende numerische Analysen helfen nur begrenzt die Systematik zu verstehen, da eine Anzahl von Parametern noch frei oder unsicher ist.

Hier werden mit sinnvollen Näherungen analytische Lösungen des nichtlinearen Problems bestimmt; für drei Generationen für alle Massen, Mischungswinkel und Phase und für N Generationen in einer weiteren Approximation für die Massen. Die selbe Methode ist für gängige Modellerweiterungen anwendbar, so daß gezieht Parameter und Modelleigenschaften variiert und diskutiert werden können.

Mit den analytischen Lösungen wird versucht, Aussagen über die Parameter des Standardmodells oder von Einbettungen zu gewinnen. Aus den möglichen Konsistenzproblemen nicht asymptotisch freier Theorien werden Parameterbeschränkungen hergeleitet. Es wird weiter demonstriert, wie man die Lösungen benutzen kann gewisse Strukturen bei hohen Einbettungsskalen zu testen. Da hier nicht auf Einbettungen eingegangen wird, kann über nötige Strukturen nichts ausgesagt werden. Die Umkehrung, die maximale Parameterkenntnis, führt zu den wahrscheinlichsten Parametern des Standardmodells und der besprochenen Erweiterungen.

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung	1
II. Die Renormierung in realistischen Modellen	10
II.1 Renormierung	10
II.2 Effektive Quantenfeldtheorien	13
II.3 Realistische Modelle	13
III. Information aus dem Renormierungsgruppenfluß	19
III.1 Konsistenz	19
III.2 Zwischenfixpunkte	24
III.3 Struktur	29
III.4 Die wahrscheinlichsten Parameter	30
IV. Standardmodell Renormierungsgruppenfluß	32
IV.1 Die Eichkopplungen	32
IV.2 Yukawa-Kopplungen	37
IV.3 Higgs-Kopplungen	58
IV.4 Die wahrscheinlichsten Higgs- und t-Massen	65
IV.5 Wahrscheinlichste Mischungswinkel und Phase	68
IV.6 Zusammenfassung	68
V. Standardmodell Erweiterungen	73
V.1 Das 2-Higgs-Standardmodell	74
V.2 Das Supersymmetrische Standardmodell	80
V.3 Allgemeine Lösungen für 3 Generationen	87
VI. Zusammenfassung	92

VII. Anhang A: Das Standardmodell	96
VIII. Anhang B: Verwendete experimentelle Daten	104
IX. Anhang C: Renormierungsgruppengleichungen	106
X. Anhang D: Modellerweiterungen	108
XI. Anhang E: Physikalische Fermion- und Higgsmassen	112
Literaturverzeichnis	114

I. Einleitung

Die theoretische Physik ist bestrebt, komplexe experimentelle Zusammenhänge möglichst einfach und einheitlich durch mathematische Modelle zu beschreiben. An solche Beschreibungen werden gewisse grundlegende mathematische Ansprüche gestellt wie Existenz und Widerspruchsfreiheit. Im weiteren werden physikalische Erfahrungen durch mathematische Strukturen beschrieben. In diesem Prozeß findet aber gleichzeitig eine Definition der Variablen statt, und darin steckt ein erheblicher Informationsgehalt. Die Aufweichung der jeweiligen Beschreibung durch experimentelle Abweichungen kann daher die mathematische Struktur und die Variablendefinition betreffen. Der Übergang zur relativistischen Kinematik ist ein Beispiel, bei dem die mathematische Struktur angepaßt wurde, während die Begriffsgrößen Ort und Zeit betehen bleiben. Die Quantenmechanik ist ein Beispiel, bei dem der Charakter der Variablen verändert wurde. Die scheinbaren Widersprüche des Welle-Teilchen-Dualismus fanden in den die Situation beschreibenden Größen eine Lösung. Dies ist der Übergang zu Operatoren. Die mikroskopische Beschreibung der Thermodynamik durch die statistische Mechanik ist dagegen ein Beispiel, bei dem sich beide Seiten verändern.

Wie soll man nun ein Modell verändern, das aus ästhetischen Gründen als unschön empfunden wird und auf der anderen Seite mit allen Experimenten übereinstimmt? Ohne experimentelle Information sind alle Veränderungen gleich gut und gleich gefährlich. Die Liste der Irrtümer beim Bau von Modellen ist lang und es gibt Beispiele, bei denen die verschiedensten Verallgemeinerungen fehlschlügen beziehungsweise nicht nachgewiesen werden konnten. Nur einige Beispiele: Magnetische Monopole (formale Ästhetik), Äther (Übertragung von Materialeigenschaften), verborgene Variablen (mikroskopische Beschreibung). Bei vorurteilsfreier Betrachtung gibt es so viele Möglichkeiten Modelle zu verallgemeinern, daß zu große Schritte gefährlich erscheinen.

Es scheint so, als ob in der Teilchenphysik heute alle Experimente korrekt beschrieben werden. Einige noch nicht ganz geklärte Sachverhalte dürften sich durch detaillierte Analysen auch als richtig herausstellen. Auf der anderen Seite gibt es eine Reihe unschöner Aspekte, die Modellveränderungen geradezu aufdrängen. Da bald

neue Präzisionsexperimente gemacht werden, ist es ein vernünftiger Standpunkt, die theoretischen Vorhersagen des gültigen Modells und naheliegender Erweiterungen bereitzustellen. Der nächste Schritt ist dann, über das was danach kommt nachzudenken.

Hier soll der Renormierungsgruppentransport der Parameter zu beliebigen, aber hohen Einbettungsskalen systematisch untersucht werden, um Einsicht in Einbettungsmöglichkeiten und Parameterbeschränkungen zu gewinnen. Obwohl natürlich kaum experimentelle Information über die Physik bei so hohen Skalen vorliegt, können die so gewonnenen Parameter eventuell neue Ideen zur Einbettung inspirieren oder auch ausschließen. Außerdem ergeben sich Parameterbeschränkungen bei niedrigen Energien, die bei der Teilchensuche hilfreich sein können. Die Argumente, die die Gültigkeit des gegenwärtigen Modells über viele Größenordnungen nahelegen, werden noch diskutiert.

Historisch betrachtet hat die Menschheit bei ihrem Erforschen der Physik natürlicherweise bei Phänomenen begonnen, welche ihren vorgegebenen Meßgeräten in der Größenordnung entsprachen. Das waren typischerweise zuerst Studien an Objekten der gleichen Größenordnung (oder größer), die zu einer Reihe von unabhängig nebeneinander existierenden Teilgebieten der Physik führten. Im Laufe der Entwicklung und der Verfeinerung der experimentellen Möglichkeiten wurden Beobachtungen bei immer kleineren Skalen durchgeführt. Schließlich war das Bausteinkonzept bei der Beschreibung von Materie erfolgreich. Das führte durch mikroskopische Beschreibungen zu einer Reduktion der fundamentalen Größen und einem Zusammenfließen der Teilgebiete, beziehungsweise einem Verwischen der Grenzen.

Interessanterweise ergab sich bis jetzt eine ganze Sequenz von Bausteinebenen, jeweils mit der Erwartung, fundamentale Bausteine gefunden zu haben. Das sind Moleküle, Atome, Atomkerne, Nukleonen und Quarks. Gleichzeitig ist aber das Elektron auf allen Ebenen immer ein fundamentales Teilchen geblieben. Eine Frage die sich hier stellt ist, ob diese Sequenz von Bausteinebenen irgendwann abbricht.

Der formale Rahmen in dem heute Teilchenphysik betrieben wird ist die relativistische Quantenfeldtheorie [1]. Speziell die Eichtheorien, die als Verallgemeinerung

der Quantenelektrodynamik [2] (QED) entstanden sind spielen nun eine wichtige Rolle. Die QED wird wegen ihres großen experimentellen Erfolges mit bisher ungekannter Präzision als Prototyp für andere Theorien angesehen. Dieses Vorgehen war bei der Erklärung der starken Wechselwirkung durch die Quantenchromodynamik [3] (QCD) sehr erfolgreich, und daher scheint es gerechtfertigt, die schwache Wechselwirkung mit Hilfe der selben Methode beschreiben zu wollen. Soll eine solche Theorie nicht nur "effektiv" sein, dann muß sie renormierbar sein. Die Renormierbarkeit [4] ist eine wichtige Eigenschaft für eine Theorie, welche über viele Größenordnungen gelten soll. Insbesondere eine Theorie die fundamentale Bausteine enthält sollte also renormierbar sein, da sie für alle beliebig hohen Skalen gelten soll.

Mit dem so bezeichneten Standardmodell [5] der elektroschwachen Wechselwirkung hat man eine Stufe erreicht, auf der Elektromagnetismus, sowie die schwache und die starke Wechselwirkung einheitlich durch eine renormierbare Eichtheorie beschrieben werden. Alle bekannten Experimente werden vermutlich durch dieses Modell korrekt beschrieben. Die Unsicherheiten sind dabei fast alle auf komplizierte Prozesse bei relativ niedrigen Energien zurückzuführen. Es wurden sogar die vor einigen Jahren entdeckten Teilchen $W^\pm$ und Z mit korrekten Massen vorhergesagt [6]. Weitere Vorhersagen, wie die Existenz eines sechsten Quarks [7], (genannt top- oder t-Quark) und des so bezeichneten Higgs-Teilchens [8] sind noch nicht nachgewiesen. Das Elektron steht nun auf der selben Stufe wie alle anderen Bausteine, und sie können alle als fundamental angesehen werden. Das Standardmodell ist in gewisser Hinsicht analog zur QED über einen riesigen Skalenbereich gültig.

Trotzdem ist man auf der theoretischen Seite mit diesem Modell unzufrieden. Zum einen wird der Higgs-Sektor, welcher nur benötigt wird um Massen konsistent einzuführen, als unästhetisch empfunden [9] (ein Teil dieser Argumente wird später erwähnt werden). Weiterhin ist das Standardmodell nur eine Beschreibung der genannten drei Wechselwirkungen mit den selben Ingredienzen, und es bleiben eine ganze Anzahl unabhängiger Parameter aus den verschiedenen Sektoren. Es handelt sich also noch nicht vollständig um eine vereinheitlichte Theorie. Außerdem kann die Gravitation als vierte bekannte Wechselwirkung nicht auf die selbe Weise einbezogen werden [10]. Zusätzlich zu den formalen Unzulänglichkeiten hat das

Standardmodell eine ganze Reihe von Teilchen, die in sich eine gewisse, noch unerklärte Systematik aufweisen. Bei den Generationen handelt es sich um bis auf die Massen identische Teilchen. Diese werden im Standardmodell nicht erklärt, sondern durch Replikation der Felder beschrieben [11].

Seit der Entstehung des Standardmodells gab es daher eine Anzahl von Versuchen, dieses Modell (und zum Teil die Gravitation) in eine umfassendere Theorie einzubetten. Grob gesprochen gibt es drei Klassen solcher Theorien:

- 1) Modelle in denen eine neue Substrukturebene mit neuen Bausteinen eingeführt wird [12, 13]. Hierbei wird die Sequenz von Bausteinebenen einfach fortgeführt. Die Motivation ist induktiv, und in gewisser Hinsicht ist das die pessimistischste Methode. Erstens verzichtet man von vorneherein auf die Möglichkeit, ein Ende der Bausteinsequenz gefunden zu haben. Weiterhin gibt man alle schönen Aspekte der Renormierbarkeit auf. Aber natürlich war das genau die Methode, die bereits einige Male funktioniert hat und Bausteine sind ein einfaches Instrument, um die Quantenzahlen zu erklären.
- 2) Modelle welche den gruppentheoretischen Aspekt des Standardmodells aufgreifen. Durch Erweiterung der Gruppenstruktur mit anschließender Brechung wird eine Einbettung erzielt [14, 15, 16]. Andere Modelle verzichten auf die spontane Symmetriebrechung zugunsten einer dynamischen Symmetriebrechung. Hierbei werden die $W^\pm$ und Z Teilchen das Äquivalent der Teilchen $\pi^\pm$, π^0 in der QCD [17]. Das Instrumentarium wird also beibehalten und die Gruppenstruktur sowie der Feldinhalt wird verändert. Hierfür spricht der Erfolg der Verallgemeinerung der QED , der als Hauptmotivation angesehen wird.
- 3) Modelle in denen grundlegend neue Mechanismen eingeführt werden, die potentiell in der Lage sind, alle oder mehrere Probleme gleichzeitig zu lösen. Hier werden mittels formaler und ästhetischer Überlegungen einzelne Aspekte von Quantenfeldtheorien verändert. Ein Beispiel dafür ist die Supersymmetrie, die die maximale Symmetrie der S -Matrix ist [18]. Momentan sind sogenannte "Superstring"-Theorien [19] sehr aktuell. Diese mathematisch sehr schönen Theorien verändern gleichzeitig eine ganze Reihe von erprobten Konzepten, und es wird sich zeigen müssen, ob diese schönen Alter-

nativen in der Natur realisiert sind. Ein generelles Problem solcher Theorien ist oft die Zahl der verwendeten Parameter. Es erscheint kaum erstrebenswert, einen riesigen Formalismus mit vielen Parametern einzuführen, um das wenige bekannte Datenmaterial zu erklären, außer es gibt dafür prinzipielle Gründe. Die alleinige Möglichkeit, ansonsten noch nicht erklärte Daten zu beschreiben, ist daher mit Vorsicht zu betrachten. Bei Abwägung der prinzipiellen Notwendigkeit solcher grundlegend neuen Mechanismen sollte man sich vielleicht mangels Daten an die vergleichbaren historischen Irrtümer erinnern, welche ganz am Anfang angesprochen wurden. Das ist momentan der einzige Maßstab zur Abwägung dieser aktuellen Ideen, die sicher nur einen sehr geringen Teil aller möglichen, formal gleichwertigen Mechanismen ausmachen.

Einzelne Details solcher Modelle werden zum Teil später behandelt. Es ist jedoch von vorneherein klar, daß alle Einbettungen irgendwann bei höheren Energien experimentell zu noch nicht gefundenen Abweichungen vom Standardmodell führen. Je nach gefundener Abweichung haben die einzelnen Modelle aufgrund ihrer freien Parameter oder ihrer Konstruktion mehr oder weniger Spielraum, um zu überleben. Deshalb wird man zu dem vorliegenden experimentellen Material Analysen machen, welche die Einschränkungen für die Parameter angeben. Dies sind Beschränkungen von der Nichtentdeckbarkeit von Abweichungen vom Standardmodell bei der gegenwärtigen Präzision. Für unter 1) genannte Modelle sind dies typischerweise untere Grenzen für die Massen und Kopplungen von neuen Bausteinen. Beispiele solcher Analysen sind [20, 21, 22]. In 2) würden Abweichungen entweder Residualwechselwirkungen zugeschrieben, oder eine Veränderung der Gruppenstruktur erfordern [23]. Für Modelle unter 3) hängt die Analyse natürlich von den Details ab. Generell gilt: Je radikaler die Modellveränderungen, desto schwieriger sind Tests mit geringem Datenmaterial.

Unter dem Gesichtspunkt der Einbettung des Standardmodells ist die damit verbundene Skala von Bedeutung. In einem Teil der Modelle, speziell den unter 1) genannten, ist diese Skala nur ein oder zwei Größenordnungen von der typischen Skala M_Z des Standardmodells entfernt. Bei einer ganzen Reihe von Modellen wird aber zum erstenmal in der Teilchenphysik ein Skalensprung über bis zu 17 Größenordnungen gemacht. Bei solch großen Skalenunterschieden werden

Renormierungseffekte der Parameter wichtig. In dieser Arbeit wird systematisch untersucht, wie durch Renormierungsgruppengleichungen Aussagen über die unabhängigen Parameter des Standardmodells oder gängiger Erweiterungen gewonnen werden können. Zum Teil handelt es sich hierbei um Konsistenzüberlegungen. Ansonsten wird im wesentlichen die Frage gestellt, ob via Renormierungsgruppengleichung Struktur in die Parameter bei hohen Skalen gebracht werden kann, beziehungsweise ob gewisse Szenarien bevorzugt sind.

Da in allen Einbettungen die freien Parameter an der Einbettungsskala erklärt werden sollen, besteht die Absicht, wenn möglich Struktur in die Parameter bei der Einbettungsskala zu bringen. Die Fragestellung, welche Strukturen möglich sind, gibt Hilfestellung bei der Konstruktion von Einbettungen. Insbesondere die so gewonnenen Strukturen würden es erlauben, die Zahl der Parameter zu reduzieren.

Hier noch einige Argumente, die stark für das genannte Programm sprechen. Am bekanntesten dürfte wohl die Entwicklung der Eichkopplungen im Standardmodell sein. Die drei unabhängigen Kopplungen sind in ihrer Größe so, daß sie bei höheren Skalen durch Renormierungseffekte aufeinander zulaufen und sich sogar vereinigen können. Dies führte zur Konstruktion sogenannter "Grand Unified Theories" [15] (GUT's), in welchen die drei Eichsektoren des Standardmodells aus einer einzigen Eichtheorie folgen [24]. Drei unterschiedliche Kopplungen können auf sechs verschiedene Weisen in ihrer Größe angeordnet sein. Nur diese eine Anordnung erlaubt prinzipiell eine Vereinigung. Damit die Kopplungen den selben Wert annehmen, muß eine Beziehung zwischen den Eichkopplungen bei niedrigen Skalen bestehen. Interessanterweise kommt die Skala der Vereinigung der Planck-Skala, bei der die Gravitation wichtig wird, relativ nahe. Die Gravitation ist zugleich die letzte bekannte, noch nicht einbezogene Wechselwirkung. Die Planck-Skala, die üblicherweise mit 10^{19} GeV angegeben ist, wird hier nur als Größenordnung verstanden, da die semiklassische Berechnung durchaus einen verfälschten Wert liefern kann.

Ein weiteres Argument ist das Massenspektrum der bekannten Quarks und Leptonen. Innerhalb einer Generation scheinen die Massen mit den elektromagnetischen und starken Ladungen Q_{EM} und Q_{QCD} gewichtet mit der Stärke der Kopplung verknüpft zu sein. Hier die Massenwerte (Quarkmassen bei 1 GeV stammen aus

[25] und die physikalischen Leptonmassen aus [26]):

1. Generation	2. Generation	3. Generation	Q_{EM}	Q_{QCD}
$u = 5.1 \text{ MeV}$	$c = 1.35 \text{ GeV}$	$t > 23 \text{ GeV}$	$\frac{2}{3}$	$\times$
$d = 8.9 \text{ MeV}$	$s = 175 \text{ MeV}$	$b = 5.3 \text{ GeV}$	$-\frac{1}{3}$	$\times$
$e^- = 511 \text{ KeV}$	$\mu^- = 105.7 \text{ MeV}$	$\tau^- = 1.78 \text{ GeV}$	-1	0
$\nu_e < 46 \text{ eV}$	$\nu_\mu < .25 \text{ MeV}$	$\nu_\tau < 70 \text{ MeV}$	0	0

Masselose Neutrinos haben keine solchen Ladungen. Elektron, Myon und Tau haben etwas Masse, elektromagnetische Ladung und keine starke Ladung. Quarks dagegen sind schwer, verglichen mit den Leptonen der selben Generation und haben elektromagnetische und stark koppelnde starke Ladung. Innerhalb der Quarks der selben Generation scheint die elektromagnetische Ladung mit den Massenunterschieden verknüpft zu sein (Ausnahme: 1. Generation). Da die Veränderung der Massenparameter in den Renormierungsgruppengleichungen mit den Ladungen zusammenhängt, scheint dies sehr vielversprechend für das angestrebte Programm. Vielleicht kann man durch die Renormierungsgruppengleichungen die Massenparameter so transformieren, daß sie bei einer hohen Skala eine andere Systematik aufweisen. Da Massen vermutlich nur im Zusammenhang mit der Gravitation wirklich fundamental erklärt werden, könnte dieses Programm einer systematischen Darstellung der Möglichkeiten die notwendige Vorarbeit sein.

Viele kosmologische Fragestellungen werden heute aus teilchenphysikalischer Sicht untersucht. Kurz nach dem "Urknall" [27] herrschten im Universum extrem hohe Temperaturen, die im Teilchenbild hohen Energien entsprechen. Während der Abkühlung wurden sozusagen alle Energieskalen überstrichen, so daß die Physik bei all diesen Skalen im Prinzip den heutigen Zustand des Universums beeinflußt hat. Interessanterweise liefert das Standard- GUT-Bild sehr gute Ergebnisse, wie z.B. mögliche Erklärungen für die Baryonassymmetrie und weitere kosmologische Gegebenheiten [28]. Dieser Abdruck von teilchenphysikalischen Eigenschaften auf die Kosmologie kann ebenfalls als Argument für das Auftreten eines Skalensprungs verstanden werden. Fundamental andersartige physikalische Gegebenheiten bei mittleren Skalen würden die Vorhersagen etwas verändern. Zum Beispiel sind zur

Erklärung der Baryonassymmetrie Zeiten von 10^{-35} s nach dem Urknall notwendig. Das entspricht über die zugehörige Temperatur dann etwa 10^{14} GeV.

Auf der anderen Seite soll hier nicht eine spezielle Einbettung forciert werden. Das minimale SU(5)-GUT-Modell [29] zum Beispiel als erste, vielversprechende Einbettung ist mittlerweile ausgeschlossen, da die zugehörigen Proton-Lebenszeiten zu klein sind [30]. Vielmehr sollen die allgemeinen Gesichtszüge einer Situation mit großem Skalensprung untersucht werden.

Zuletzt gibt es noch einige Argumente gegen das Fortführen des Baustein-Programms ohne Skalensprung. Wir erkennen heute den Zusammenhang der bekannten Bausteinebenen mit den verschiedenen Wechselwirkungen. Die Ebenen Moleküle, Atome, Atomkerne und Nukleonen entsprechen elektromagnetischen Residualwechselwirkungen, elektromagnetischer Wechselwirkung, starken Residualwechselwirkungen und starker Wechselwirkung. Um die letzte Ebene, Quarks und Leptonen aus Bausteinen aufzubauen braucht man neue, bisher unbekannte Wechselwirkungen. Üblicherweise, wie in der QCD, sollten dann Residualkräfte vorhanden sein. Diese können nur mit der schwachen Wechselwirkung identifiziert werden, die im Standardmodell aber schon einbezogen ist. Es erscheint sehr speziell, ein zusammengesetztes Modell zu konstruieren, bei dem Residualwechselwirkungen so extrem unterdrückt sind, daß sie nicht entdeckt werden könnten. Deshalb wird in allen diesen Modellen ein Teil des Standardmodells aufgegeben, um Raum für Residualwechselwirkungen zu haben. Damit wird aber die Renormierbarkeit auf dieser Ebene zerstört. Man muß sich fragen, ob das - wenn man sich den Erfolg der QED und des Standardmodells ansieht - nicht ein Rückschritt ist. Zusätzlich würden zum erstenmal die Bindungsenergien größer als die Massen der Bindungszustände. Das heißt, ein Großteil der Masse der Bausteine würde durch Bindungsenergien aufgezehrt. Es erscheint auf dieser Ebene so, als ob man die Basis von zusammengesetzten Teilchen verläßt.

Unabhängig von den Einbettungsmöglichkeiten soll hier aber nur eine Voraussetzung angenommen werden. Das Standardmodell oder gängige Erweiterungen sollen über einen großen Skalenbereich gültig sein. Damit wird der Transport der effektiven Parameter zur Einbettungsskala interessant und möglicherweise sind diese Parameter dann ganz anders strukturiert.

Diese Arbeit gliedert sich folgendermaßen:

In Kapitel II wird das Verständnis der Renormierung von Modellen mit Einbettungsskalen erläutert und die Bedeutung der später verwendeten β -Funktionen diskutiert. Kapitel III dient der Darstellung der bei der Analyse verwendeten Methoden. An einfachen Beispielen werden die Konzepte illustriert, was das spätere Vorgehen wesentlich verständlicher macht. In Kapitel IV wird dann das Standardmodell mit diesen Methoden untersucht. Kapitel V zeigt die Analyse des Standardmodells mit zwei Higgs-Dubletten und des supersymmetrischen Standardmodells. Zusätzlich wird für drei Generationen das Problem der Evolution der Parameter sehr allgemein für eine riesige Klasse von Modellen gelöst. Dabei wird auf die in Kapitel IV gewonnenen Ergebnisse zurückgegriffen. In Kapitel VI schließlich werden die Ergebnisse zusammengefaßt und die wichtigsten Ergebnisse in ihrer Bedeutung beurteilt.

II. Die Renormierung in realistischen Modellen

In diesem Kapitel soll skizziert werden, wie das heutige Verständnis der Renormierung von Quantenfeldtheorien ist und was Renormierung in einzubettenden Modellen heißt. Speziell die Notwendigkeit von Schleifenrechnungen und die Bedeutung von Gegentermen in dieser Situation soll erörtert werden. Dies dient dazu, die Bedeutung von Renormierungseffekten für solche Modelle zu verstehen.

II.1 Renormierung

Indem man die Feldvariable φ eines jeden Punktes x als quantenmechanisches System auffaßt, kommt man zur Quantenfeldtheorie [1]. Die unendlich vielen Variablen entsprechen einem unendlich dimensional quantenmechanischen Problem. Aus dem Kommutator $[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ endlich vieler, kanonisch konjugierter Variablen wird dann, da der Index x nun kontinuierlich ist, eine "δ-Funktion":

$$[\varphi(x), \Pi(x)] = i\hbar\delta(x - y) . \quad (II.1)$$

Dieser scheinbar einfache, logische Schritt verbirgt aber in sich eine tiefere Problematik. Die "δ-Funktion" ist keine Funktion, wie der Name suggeriert, sondern eine Distribution. Produkte von Distributionen sind im allgemeinen keine Distribution, und man muß diesbezüglich eine mit den anderen Eigenschaften verträgliche Definition angeben [31]. Dies wird bei Berechnungen wichtig, in denen solche Produkte am selben Ort auftreten.

Viele Theorien sind nur störungstheoretisch behandelt, da die vollen Gleichungen nicht gelöst werden können. Dazu wird die freie Theorie quantisiert und dann die Wechselwirkung als Störung aufgefaßt. Somit ist der Ausgangspunkt für weitere Überlegungen eine Situation, in der nur die 2-Punkt-Funktion von Null verschieden ist. Für den Fall, daß die Störungen eingeschaltet sind, rechnet man dann die Beiträge zur n -Punkt-Funktion aus. Diese lassen sich symbolisch als Feynman-Graphen mit n externen Linien auffassen. Jeder Graph ist aus 2-Punkt-Funktionen und Wechselwirkungsvertizes zusammengesetzt und kann nach Potenzen der Wechselwirkung klassifiziert werden.

Eine andere Weise die Diagramme zu klassifizieren ist, die Beiträge zur n -Punkt-Funktion nach der Anzahl der Schleifen zu ordnen. Diagramme ohne Schleifen, die Baumdiagramme, sind die führenden Beiträge. Im Impulsraum sind solche n -Punkt-Funktionen, die Baumdiagrammen entsprechen, Produkte aus freien 2-Punkt-Funktionen (Propagatoren) und Kopplungskonstanten. Dabei wird an jedem Wechselwirkungsvertex die Energie-Impuls-Erhaltung gewährleistet, wodurch alle inneren Impulse fixiert sind. Beim n -Schleifen-Diagramm sind dagegen n innere Impulse nicht fixiert, und es muß über diese Freiheitsgrade über alle Werte integriert werden. Hier tauchen nun die Probleme mit der " δ -Funktion" auf, da die Integration bis zu unendlichen Werten im Impulsraum koinzidierenden Punkten im Ortsraum entspricht. An dieser Stelle muß dann die notwendige Definition von Produkten von δ -Distributionen angegeben werden.

Seit den frühesten Tagen der *QED* (Oppenheimer 1930 [32]) traten bei Schleifendiagrammen divergente Ausdrücke auf. Man kann die Eigenschaften solcher Diagramme verbessern, wenn man genau diese angedeuteten Freiheiten bei der Definition von Produkten der δ -Distribution ausnützt.

Eine Möglichkeit, dies zu tun, ist die Einführung von Gegentermen [4], die lokalen Wechselwirkung entsprechen. Beim Zusammenziehen eines 1-Schleifen-Diagramms zu einem Punkt wird die Schleifenanordnung erniedrigt. Es entsteht ein Baumdiagramm. Die Freiheiten der Definition bestehen darin, daß der Beitrag des Schleifendiagramms um das durch mit einem Koeffizienten versehene Baumdiagramm modifiziert werden darf (auch bei endlichen Diagrammen). Davon wird so Gebrauch gemacht, daß die Divergenzen wenn möglich verschwinden. Dieses, das Schleifendiagramm modifizierende Baumdiagramm, kann aus einer zusätzlichen, lokalen Lagrangedichte erzeugt werden. Dabei werden dann die Feynman-Regeln verwendet, die einer naiven Produktbildung von " δ -Funktionen" entsprechen. Dabei ist zu beachten, daß das oft als inkonsistent bezeichnete Subtrahieren von Unendlichkeiten nicht stattfindet. Lediglich die Verwendung von naiven Feynmanregeln und von Gegentermen spiegelt dies vor. Dies ist sehr schön an Theorien zu sehen, die eine BPHZ-Renormierung erlauben [33].

Für höhere Schleifendiagramme geht man rekursiv vor. Es werden zuerst (wenn möglich) alle niedrigeren Schleifendiagramme endlich gemacht. Obwohl die genaue Prozedur formal aufwendig ist, ändert sich an der Aufgabenstellung nichts [34].

Um das skizzierte Vorgehen mit Gegentermen ausführen zu können, muß die betrachtete Theorie zuerst mit einer Regularisierung versehen werden [35]. Darunter versteht man eine kontinuierliche technische Veränderung, welche die Existenz der auftretenden Integrale gewährleisten (z.B. eine Beschränkung des Integrationsbereichs nach oben [36]). Nach Durchführung der oben skizzierten Prozedur wird die Regularisierung kontinuierlich entfernt und es bleibt gegebenenfalls eine endliche Theorie übrig [37].

Die Regularisierung sollte aber mit den anderen Eigenschaften der Theorie nicht in Konflikt stehen, da sonst nach Entfernung der Regularisierung Relikte dieses technischen Details zurückbleiben können.

Renormierbarkeit [4] einer gegebenen Theorie heißt, daß in beliebiger Schleifenanordnung nur Gegenterme auftreten, die bereits in der Lagrangedichte enthalten sind. Dann können die Divergenzen durch die Definition der Parameter in der Theorie beseitigt werden. Anderenfalls ist das Programm nicht kontrollierbar, da immer mehr, neue, höherdimensionale Operatoren auftreten* [38].

Dies kann sehr einfach an einer ϕ^n -Theorie gesehen werden. Ein 1-Schleifen-Diagramm hat $2n - 4$ äußere Linien und trägt somit zur $(2n - 4)$ -Punkt-Funktion bei. Der nötige Gegenterm ist $\mu\phi^{2n-4}$. Nur für $n \leq 4$ ist $2n - 4 \leq n$. Für $n > 4$ werden immer höhere Gegenterme produziert, die nicht in der Lagrangedichte enthalten sind und ihrerseits noch höhere Gegenterme produzieren würden.

Die quantenmechanische Konsistenz einer gewünschten Symmetrie muß in den renormierten Ward-Identitäten kontrolliert werden [39]. Falls eine Symmetrie durch Gegenterme zerstört wird, kann sie quantenmechanisch nicht konsistent installiert werden. Man sagt, daß eine solche Theorie eine "Anomalie" besitzt [40]. Anomalien werden heute in engem Zusammenhang mit geometrischen und topologischen Eigenschaften der untersuchten Theorie verstanden [41].

Auf andere wichtige Details bei der Quantisierung von Eichtheorien wird hier nicht eingegangen [42].

*Falls eine Theorie störungstheoretisch nicht renormierbar ist, heißt dies aber nicht, daß eine solche Theorie divergent sein muß.

II.2 Effektive Quantenfeldtheorien

Eine mathematisch konsistente Beschreibung der Quantenfeldtheorie muß die Renormierung beinhalten. In der Sprache der Diagramme heißt dies, daß es unerheblich, ist ob ein Propagator einer inneren oder äußeren Linie entspricht. Dadurch entstehen automatisch Schleifendiagramme.

Trotzdem kann eine Beschreibung physikalischer Sachverhalte mit einem Modell, in dem nur Baumgraphen existieren sollen, sinnvoll sein. Ein solches Modell wird "effektiv" genannt.

Falls die Reaktionen von Teilchen mit bekanntem Spin beschrieben werden sollen, kann dies auf folgende Weise geschehen:

1. Für jede Teilchenspezies wird ein entsprechendes Feld mit einer freien Lagrangedichte eingeführt. Für die Masse wird der experimentell bekannte Wert verwendet. Offensichtliche Symmetrien werden ebenfalls in dieser Lagrangedichte berücksichtigt.
2. Aus den beobachteten, einfachsten Zerfällen und Teilchenumwandlungen konstruiert man eine Wechselwirkungs-Lagrangedichte. Die Kopplung wird experimentell bestimmt.
3. Man betrachte nur Baumdiagramme. Dadurch werden alle Kombinationen der einfachen Reaktionen mit den richtigen Kopplungen beschrieben.

Durch 1. werden die richtigen Propagationseigenschaften gewährleistet (Kinematik). 2. garantiert die richtigen Kopplungen (Quantenzahlen) und die Energie-Impuls-Erhaltung. Das Vorgehen in 3. beschreibt dann alle möglichen Kombinationen von einfachen Prozessen mit der richtigen Kinematik und korrekten Quantenzahlen. So können sehr komplexe Reaktionen berechnet werden [43].

Ein sehr schönes Beispiel für die Wirksamkeit dieser Methode bei der Beschreibung von mesonischen Reaktionen ist in [44] gegeben.

II.3 Realistische Modelle

Das in Kapitel II.2 skizzierte Vorgehen zeigt, daß ein gewisser Erfolg der störungstheoretischen Quantenfeldtheorie vorprogrammiert ist, solange man sich auf Baumdiagramme beschränkt. Eine mathematisch konsistente Beschreibung

erfordert aber Schleifendiagramme und Renormierung. Die Einschränkung auf Baumdiagramme ist willkürlich und nur im Zusammenhang mit einer effektiven Beschreibung erlaubt.

In Kapitel II.1 dagegen wird davon ausgegangen, daß das zu beschreibende System keine Gültigkeitsgrenzen hat. Man erlaubt nämlich Moden mit beliebig hohen und tiefen Wellenzahlen. Dies wird aber Einbettungen und Kondensationen in realen Modellen nicht gerecht.

Bei Einbettungen kann die Zahl der Freiheitsgrade oberhalb der Einbettungsskala ganz anders sein. Bei zusammengesetzten Teilchen etwa werden dann die Felder der Bausteine relevant, deren Information in dem einzubettenden Modell nicht enthalten ist. Physikalische Meßgrößen hängen aber davon ab, ob Moden jenseits der Einbettungsskala zu Schleifendiagrammen beitragen.

Bei Kondensationen nimmt die Zahl der Freiheitsgrade ab. Unterhalb der Kondensationsskala sind die kondensierten Objekte die relevanten Felder. Eine solche Möglichkeit ist die Formation von Bindungszuständen deren Information nicht im Modell enthalten ist.

Ein konkretes Beispiel hierzu ist die *QCD*. Der nicht exakt bewiesene, aber durch diverse Indizien gestützte Einschluß von Quarks in Bindungszustände mit *QCD*-Ladung Null (Confinement [45]) bewirkt, daß die Quarks nur mit gewissen Minimalmoden wechselwirken. Darunter sind Hadronen die relevanten Objekte. Deshalb ist die, für kleine Impulsüberträge explodierende effektive Kopplung zwischen Quarks an sich schon bedeutungslos, da das nichtperturbative Confinement keine freien Quarks erlaubt. Trotzdem ist die Frage, wie Moden unterhalb der Confinement-Skala verstanden werden sollen, nicht einfach zu beantworten. Eigentlich sollten solche Moden aus Konsistenzgründen bei Schleifenrechnungen ausgeschlossen werden. Rein formal ist dies in einer Quantenfeldtheorie nicht enthalten.

Die beiden Vorgehensweisen in II.1 und II.2 sind somit beide nicht ganz korrekt bei der Beschreibung realer Prozesse mit Einbettungsskalen.

Der Versuch physikalisch motivierte Beschränkungen für die erlaubten Wellenzahlen in der Lagrangedichte zu installieren ist nicht einfach, da die elementarsten Schritte der Quantisierungsvorschrift davon berührt werden.

Ein reelles skalares Feld ϕ etwa mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 \quad (II.2)$$

führt zu der Bewegungsgleichung

$$(\square - m^2)\phi(\vec{x}, t) = 0. \quad (II.3)$$

Auf einem geeigneten Gitter (das gegen das Kontinuum im Limes $a \rightarrow 0, L \rightarrow \infty$ gehen soll) kann $\phi(\vec{x}, t)$ folgendermaßen als Fourier-Reihe geschrieben werden:

$$\phi(\vec{x}, t) = \sum_{k_1, k_2, k_3} \left(\frac{2\pi}{V \omega_k} \right) \left(a(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{x}} + a^*(\vec{k}, t) e^{-i\vec{k}\vec{x}} \right). \quad (II.4)$$

Hierbei ist V das Volumen und $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$.

Die Amplitude $a(\vec{k}, t)$ erfüllt dann folgende Bewegungsgleichung:

$$\ddot{a}(\vec{k}, t) + \omega_k^2 a(\vec{k}, t) = 0. \quad (II.5)$$

Dies ist die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators, und genau deswegen kann die störungstheoretische Quantenfeldtheorie sehr kompakt mittels Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren geschrieben werden. Beschränkungen der Wellenzahlen sind jedoch nicht erlaubt.

Wollte man solche Beschränkungen aus den Bewegungsgleichungen ableiten, so müßte in Gl. (II.5) ω_k^2 durch $\omega_k^2 \theta(\omega_0 - \omega_k)$ ersetzt werden. Soll dies mittels Fourier-Darstellung der Lösungen im Ortsraum aus den Bewegungsgleichungen folgen, so müssen diese entsprechend modifiziert werden. Durch Fourier-Transformation der θ -Funktion wird aber klar, daß dies auf dem Niveau der Lagrangedichte den Rahmen einer lokalen Quantenfeldtheorie mit kinetischem Term und lokalem Wechselwirkungspotential sprengt. Das heißt, daß Beschränkungen für Wellenzahlen im allgemeinen so nicht installiert werden können.

Um die gewollten Einschränkungen der Wellenzahlen zu erreichen, wird dies als physikalisch motivierte Zusatzbedingung zur freien Lagrangedichte gefordert.

Diese Zusatzbedingung muß dann auf allen Ebenen beachtet werden und stellt in der Bewegungsgleichung für $a(\vec{k}, t)$ die notwendige Einschränkung her. Da die freie Theorie quantisiert wird ist die Zusatzbedingung mit den einfachen Bewegungsgleichungen verträglich.

Der Unterschied zu Berechnungen ohne eine solche Forderung wird davon abhängen, bei welcher Skala diese Einschränkung beginnt. Schiebt man diese Grenze kontinuierlich zu beliebig hohen Werten, dann werden die Ergebnisse ineinander übergehen.

Da in dieser Arbeit sehr hohe Einbettungsskalen untersucht werden, ist die Approximation in der die Zusatzbedingung der Modeneinschränkung ganz wegfällt, gut (also die übliche Quantenfeldtheorie). Es sollen also konventionelle Techniken der Quantenfeldtheorie verwendet werden. Für Fälle, in denen niedrigere Einbettungsskalen möglich sind, soll dieser Abschnitt dazu dienen, die Aufweichung der Zuverlässigkeit solcher Ergebnisse zu verdeutlichen, da die Rolle von hohen Moden unklar ist. Speziell die Gefahren von Ergebnissen, die eine Einbettungsskala wenig größer als die typischen Energien haben, werden so deutlich, da dort die approximative Verwendung der üblichen Regeln nicht mehr gut ist. Außerdem soll dies verdeutlichen, daß extreme Ultraviolett-Eigenschaften im Sinne einer Einbettung vorsichtig zu interpretieren sind. Es muß eine entsprechende Größe betrachtet werden, die nicht von Moden jenseits der Einbettungsskala abhängt.

In der Quantenfeldtheorie werden die Modellparameter generell skalenabhängig, was im Prinzip nichts mit der Beseitigung von Divergenzen zu tun hat; die unendlich vielen Dimensionen des Systems sind dafür verantwortlich. Die Renormierungstheorie hat so einige Freiheiten, die von der Wahl der die physikalischen Parameter definierenden kinematischen Punkte herrühren. Diese Referenzskalen können frei gewählt werden, und jede Wahl führt zu einer anderen Definition der Parameter der Theorie.

Da die Physik nicht von diesen Normierungsbedingungen abhängen darf, sollte jede Referenzskala gleichwertig sein. Die Invarianz der physikalischen Aussagen bei Referenzskalenveränderungen die nur die Normierungsbedingungen verändern wird in der Renormierungsgruppe zum Ausdruck gebracht [46]. Physikalische Größen wie S-Matrix-Elemente sind invariant bei Veränderung der Referenzskala:

$$\mu \rightarrow \mu' . \quad (II.6)$$

Gleichzeitig werden auch die Parameter der Theorie transformiert:

$$(g(\mu), m(\mu)) \rightarrow (g(\mu'), m(\mu')) . \quad (II.7)$$

Diese Invarianz in differentieller Form lautet:

$$\mu \frac{dS}{d\mu} = 0 . \quad (II.8)$$

Die totale logarithmische Ableitung nach μ lautet mit partiellen Ableitungen:

$$\mu \frac{dS}{d\mu} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_m m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} . \quad (II.9)$$

Hierbei ist

$$\beta = \mu \frac{dg(\mu)}{d\mu} = \frac{dg(t)}{dt} , \quad (II.10)$$

wobei

$$t = \ln \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right) \quad (II.11)$$

gilt und

$$\gamma_m = -m^2 \mu \frac{dm^2(\mu)}{d\mu} . \quad (II.12)$$

Die Koeffizienten β und γ_m werden Renormierungsgruppenkoeffizienten [47] genannt. Sie beinhalten die Variation von $g(\mu)$ und $m(\mu)$ wenn μ verändert wird. Generell sind die oben definierten Funktionen β und γ_m aus Dimensionsgründen Funktionen von g und $\frac{m^2}{\mu^2}$. Darüber hinaus sind sie generell vom Renormierungsschema und der Eichung abhängig [48].

Um sich auf Aussagen zu beschränken, die nicht von technischen Details abhängen wird der Limes $\frac{m^2}{\mu^2} \rightarrow 0$ betrachtet. Dann kann man zeigen, daß β nur eine Funktion von g ist und nicht vom Schema und der Eichung abhängt [49]. Dieser Limes ist für $\mu^2 \gg m^2$ eine sehr gute Approximation. Physikalisch bedeutet dies, daß die Umskalierungsgesetze für $g(\mu)$ für Skalen die weit von m entfernt sind nicht mehr von m abhängen. Der Fehler bei Verwendung dieses Limes für alle Skalen ist lediglich auf einen Skalenbereich um $\mu = m$ beschränkt. Bei großen Skalensprüngen ist dieser Bereich vernachlässigbar, da die größten Renormierungseffekte durch die β -Funktionen im Limes $\frac{m^2}{\mu^2} \rightarrow 0$ gegeben sind. Die Umgebung von $\mu = m$ ist also, verglichen mit dem gesamten Skalenbereich, sehr klein.

Die in den Anhängen angegebenen 1-Schleifen- β -Funktionen für das Standardmodell und Erweiterungen sind solche β -Funktionen, bei denen dieser Limes genommen ist. Da hier sehr hohe Einbettungsskalen verwendet werden, ist die Vernachlässigung von Masseneffekten eine sehr gute Näherung. Würde man eine Einbettung explizit behandeln, so würden auch um diese Einbettungsskala weitere Masseneffekte auftreten. Diese werden mit der selben Begründung wie oben weggelassen.

III. Information aus dem Renormierungsgruppenfluß

In diesem Kapitel werden die später verwendeten Methoden dargestellt und an einfachen Beispielen illustriert. Wie schon erwähnt, soll untersucht werden, welche Parameter in den Renormierungsgruppengleichungen zulässig sind und welche Fixpunkt- und Strukturmöglichkeiten entstehen können.

III.1 Konsistenz

Nur wenige Quantenfeldtheorien sind exakt gelöst, denn je komplizierter eine Theorie aufgebaut ist, desto geringer sind meist die Chancen, eine exakte Lösung zu finden. Deshalb werden viele Theorien heute störungstheoretisch behandelt. Als Ausgangspunkt dient meist eine freie Theorie mit kinetischem Term und Massenterm. Alle anderen Kopplungskonstanten werden zuerst zu Null gesetzt. Diese wohl definierte, freie Theorie wird quantisiert, und dann werden kleine Wechselwirkungsterme als Störung betrachtet.

Durch dieses Vorgehen können Konsistenzprobleme der vollen, nichtlinearen Theorie verdeckt werden. Das heißt, es ist zu erwarten, daß in wechselwirkenden Theorien Beschränkungen für Parameter aus Konsistenzgründen auftreten. Im Extremfall kann sogar die einzig erlaubte Theorie eine freie Theorie mit verschwindender Wechselwirkung sein. Eine solche Theorie wird dann "trivial" genannt [50].

Ein Beispiel, bei dem dies passiert, ist eine skalare einkomponentige Theorie mit quartischem Wechselwirkungsterm in d Dimensionen:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi_d \partial^\mu \Phi_d - \mu^2 \Phi_d^2 - \lambda \Phi_d^4 . \quad (III.1)$$

- Für $d > 4$ kann bewiesen werden, daß die einzig konsistente Theorie frei ist, das heißt $\lambda = 0$. (Trivialität) [51, 52].
- Für $d \leq 4$ gilt exakt: $0 \leq \lambda < \lambda_{max}$. Für 4 Dimensionen ist die Trivialität noch nicht exakt bewiesen, doch sprechen einige Indizien dafür. In dem Beweis der Trivialität für $d > 4$ fehlt nur eine Kleinigkeit, um das Ergebnis auch für $d = 4$ zu beweisen [53].

- Für $d = 4$ ist diese Theorie nur für $\lambda = 0$ konsistent, wenn man zeigen kann, daß die Wellenfunktionsrenormierungskonstante verschwindet. Eine nicht triviale Theorie muß asymptotisch frei sein [51].

Zusätzlich gibt es gute Gründe, die Trivialität für $d = 4$ zu vermuten denn:

- Der Kontinuum-Limes von nichtperturbativen Computersimulationen ist konsistent mit Trivialität [54]. Dies gilt auch für ein $SU(2)$ -Higgs-Modell [55].
- Im Limes vom unendlichen "cutoff" in der $\frac{1}{N}$ Entwicklung der $O(N)$ -symmetrischen Theorie kann Trivialität gesehen werden [56].

Die Konsequenzen der Trivialität sind weitreichend. Speziell die spontane Symmetriebrechung mittels skalarer Felder kann dann nicht durchgeführt werden, da dies einen nichtverschwindenden Vakuum Erwartungswert $v \neq 0$ (und damit $\lambda \neq 0$) erfordert. Das könnte sogar zu der paradoxen Situation führen, daß das Standardmodell phänomenologisch exzellent funktioniert, aber aus Konsistenzgründen ausgeschlossen ist. Im weiteren werden aber Möglichkeiten auftreten, die es erlauben, die Konsistenz wieder herzustellen, was dann zu Parameterbeschränkungen führt.

In der Störungstheorie entspricht die Trivialität einer explodierenden effektiven Kopplung. Dies steht im Widerspruch zur Källen-Lehmann-Spektraldarstellung [57], die ein gewisses Skalierungsverhalten der n -Punkt-Funktionen für hohe Skalen erfordert. Um das notwendige asymptotische Skalierungsverhalten zu erzwingen muß $\lambda(0) = 0$ gesetzt werden. Da im allgemeinen große Kopplungen jenseits der Möglichkeiten der Störungstheorie sind, ist eine perturbativ explodierende effektive Kopplung (auch Landau-Singularität genannt [58]) lediglich ein Anzeichen möglicher Konsistenzprobleme. Es besteht perturbativ natürlich auch die Möglichkeit, daß höhere Ordnungen das Problem beseitigen oder daß das Problem in der exakten Lösung nicht existiert.

Das Vorgehen wird hier, mangels nichtperturbativer Aussagen, durch die Betrachtung explodierender, effektiver Kopplungen geschehen. Die Frage nach der Existenz der Trivialität wird nicht im Einzelfall diskutiert werden, doch gibt es je nach dem Typ der Felder mehr oder weniger gute Gründe dies anzunehmen. Exakte Trivialitätsbeweise sind auf einfache, skalare Theorien beschränkt. Doch die

inhärenten Probleme sind an sich nicht an den Feldtyp gebunden, so daß die gleichen Schwierigkeiten in einem viel allgemeineren Zusammenhang zu erwarten sind [59]. Allein die mögliche Existenz dieser Probleme hat oft so weitreichende Konsequenzen, daß unter Angabe der Vorbehalte eine Diskussion sehr interessant ist. Eine asymptotisch freie Theorie hat keine Trivialitätsprobleme. Es ist bemerkenswert, daß nichtabelsche Eichtheorien, die als Verallgemeinerung der sehr erfolgreichen QED entstanden, gleichzeitig die einzigen asymptotisch freien Theorien sind [60]. Die Forderung nach Theorien ohne Trivialitätsprobleme führt also genau zur selben Klasse von Modellen.

Die mittels perturbativer effektiver Kopplungen abgeleiteten Landau-Pole haben eine gewisse Unsicherheit wegen des Beitrags nichtperturbativer Kopplungswerte. Jedoch wird man sehen, daß große Variationen der β -Funktionen für große Kopplungen diese Singularitäten nur sehr wenig verschieben. Das kommt von der Explosion der effektiven Kopplungen in einem sehr engen Skalenbereich. Wegen dieser extremen Sensitivität können auch quantitative Schlußfolgerungen mit perturbativen β -Funktionen gemacht werden.

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Trivialität einer Theorie zu vermeiden: Man kann fordern, daß die betrachtete Theorie nur bis zu einer endlichen Skala gültig ist [61]; das entspricht zum Beispiel einer Einbettung in ein anderes Modell. Trivialitätsprobleme sollen nun nicht innerhalb der Gültigkeitsgrenzen auftreten. Deshalb dürfen innerhalb dieser Grenzen keine Landau-Singularitäten erscheinen. Dies ist aber viel weniger restriktiv als die Forderung, überhaupt keine Singularitäten zu haben. Dies wird weiter unten an einem Beispiel demonstriert werden. Eine weitere Möglichkeit zur Vermeidung der Trivialität ist die Einführung zusätzlicher Felder, welche an die durch Trivialität gefährdeten Felder koppeln [62]. Dadurch wird die effektive Kopplung verändert, und unter gewissen Voraussetzungen kommt man zu einer nichttrivialen Theorie.

An dem Beispiel der sehr einfachen $O(N)$ -Theorie [63] wollen wir beide Mechanismen demonstrieren. Das reine $O(N)$ -Modell hat als Wechselwirkung

$$\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{8} (\phi^2)^2. \quad (III.2)$$

Die effektive Kopplung $\lambda(t)$ gehorcht folgender Differentialgleichung :

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{N}{16\pi^2} \lambda^2(t) \quad (III.3)$$

mit

$$t = \ln \left(\frac{\mu}{M_Z} \right) .$$

Die Lösung hierzu lautet

$$\lambda(t) = \frac{\lambda(0)}{1 - \left(\frac{N}{16\pi^2} \right) \lambda(0)t} , \quad (III.4)$$

wobei $t = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{q^2}{q_0^2} \right)$ gilt. q_0 ist eine Referenzskala. Diese Lösung hat für $\lambda(0) > 0$ eine Singularität bei

$$t_{Pol} = \frac{16\pi^2}{N} \frac{1}{\lambda(0)} . \quad (III.5)$$

Soll es keine Singularität (also mögliche Trivialitätsprobleme) geben, muß $\lambda(0) \leq 0$ gelten. $\lambda(0) < 0$ ist wegen der Existenz eines Grundzustandes nicht erlaubt. Somit bleibt nur $\lambda(t) = 0$ als einzige Lösung übrig (= trivial).

Führt man eine Gültigkeitsskala q_{max} ein, dann reicht es aus, Singularitäten bis q_{max} zu vermeiden:

$$t_{max} = \ln \left(\frac{q_{max}}{q_0} \right) < t_{Pol} = \frac{16\pi^2}{N} \frac{1}{\lambda(0)} . \quad (III.6)$$

Daraus folgt eine obere Schranke für $\lambda(0)$:

$$\lambda(0) < \frac{16\pi^2}{N} \frac{1}{\ln \left(\frac{q_{max}}{q_0} \right)} = \lambda_{max} . \quad (III.7)$$

Somit ist dann ein Intervall von Werten der Kopplungskonstante erlaubt:

$$0 \leq \lambda(0) < \lambda_{max} .$$

Dies demonstriert sehr schön, wie durch eine endliche Einbettungsskala Trivialitätsprobleme innerhalb des Gültigkeitsbereichs vermieden werden können [64]. Die zweite ausgesprochene Möglichkeit zur Vermeidung von Trivialität war die Ankopplung weiterer Felder. Für unser Beispiel wollen wir nun $O(N)$ -Eichfelder dazunehmen. Die mit den Eichfeldern verknüpfte effektive Kopplungskonstante $g(t)$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{dg(t)}{dt} = -\frac{b_0}{32\pi^2} g^3(t); \quad b_0 > 0. \quad (III.8)$$

Die effektive Kopplung $\lambda(t)$ wird durch die Eichfelder modifiziert:

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{N}{16\pi^2} [\lambda^2(t) - 3\lambda(t)g^2(t) + \frac{3}{4}g^4(t)]. \quad (III.9)$$

Durch die zusätzlichen Terme ändert sich die Situation grundlegend. Um dies zu sehen, führen wir die Variable $\rho = \frac{\lambda}{g^2}$ ein und schreiben (III.9) um:

$$\frac{1}{g^2(t)} \frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{N}{16\pi^2} (\rho(t) - \rho_+)(\rho(t) - \rho_-); \quad (III.10)$$

$$\rho_{\pm} = \frac{3 - \frac{b_0}{N} \pm \sqrt{(3 - \frac{b_0}{N})^2 - 3}}{2}. \quad (III.11)$$

Im Limes $N \rightarrow \infty$ erhalten wir dann reelle Lösungen für $\rho_{\pm}$:

$$\rho_+ = \frac{3 + \sqrt{6}}{2} \simeq 2.72 \quad (III.12)$$

$$\rho_- = \frac{3 - \sqrt{6}}{2} \simeq 0.28 \quad (III.13)$$

Für $\rho_- \leq \rho(t) \leq \rho_+$ ist $\frac{d\rho}{dt}$ negativ und somit kann, falls $0 < \rho(0) \leq \rho_+$ gilt, keine Singularität in der Lösung auftreten. Umgeschrieben in λ heißt dies

$$\frac{\lambda(0)}{g^2(0)} \leq \frac{3 + \sqrt{6}}{2}. \quad (III.14)$$

Also hat $\frac{\lambda}{g^2}$ dann keine Singularitäten. Da g eine asymptotische freie Kopplung ist, kann λ auch keine Singularitäten haben. Damit ist das geeichte $O(N)$ -Modell im Limes $N \rightarrow \infty$ für $0 \leq \lambda(0) \leq \frac{3+\sqrt{6}}{2} g^2(0)$ nicht trivial [64]. Für endliche N gibt es reelle Wurzeln $\rho_{\pm}$, wenn $N > \frac{b_0}{3-\sqrt{3}}$ (> 0) erfüllt ist. Eine nichttriviale Theorie hat man, wenn zusätzlich $\rho_+ > 0$ gilt. Dies ist hier bei der Existenz reeller Wurzeln automatisch der Fall.

Natürlich ist auch eine Kombination obiger Mechanismen möglich. Dann beeinflussen sowohl die Einbettungsskala, als auch die zusätzlichen Kopplungen die Trivialitätsprobleme gleichzeitig. Zusätzliche Kopplungen können das Problem übrigens auch verschlechtern, je nachdem wie sie die β -Funktion beeinflussen.

Eine allgemein gültige Aussage, wann welche zusätzliche Felder das Problem verbessern oder verschlechtern, ist schwer möglich. Dies wird an der N -Abhängigkeit des obigen Beispiels deutlich.

III.2 Zwischenfixpunkte

Im allgemeinen sind die β -Funktionen einer Theorie wechselseitig von allen Kopplungen abhängig. Zur eindeutigen Diskussion der Fixpunktstruktur ist es notwendig, Transformationen zu neuen Variablen zu finden, und zwar so, daß die β -Funktionen dieser neuen Variablen entkoppeln. Damit kann die Fixpunktstruktur eindeutig festgelegt werden. In dem Beispiel in Abschnitt III.1 war es die Transformation zu $\rho = \frac{\lambda}{g^2}$, welche die Differentialgleichung entkoppelte und eine Diskussion der Fixpunkte erlaubte. Will man dort aus der β -Funktion für λ durch Nullsetzen die Fixpunkte finden, so stellt man fest, daß diese von $g(t)$ abhängen. Da sowohl die Lösungen $\lambda(t)$ als auch die Nullstellen unabhängig mit t laufen, kann es ohne weiteres passieren, daß die Nullstelle sich schneller als die Lösung verändert und man in einen anderen Lösungsbereich kommt. Jedoch gibt es sowohl prinzipielle als auch praktische Schwierigkeiten, eine solche Transformation generell aufzufinden.

Für die hier angestrebten Zwecke ist ein anderes, umfassenderes Konzept besser. Da die Entwicklung von effektiven Kopplungen (oder ein Satz von Variablen) von einer Anfangsskala zu einer beliebigen, endlichen Endskala betrachtet wird, führen wir die Abbildungsdichtematrix Ω ein (beachte die Ordnung von t_1 und t_2):

$$\Omega_{ij}(g_1(t_1), \dots, g_n(t_1), t_2 - t_1) := \frac{\partial g_i(g_1(t_1), \dots, g_n(t_2), t_2 - t_1)}{\partial g_j(t_1)} \quad (III.15)$$

Mit $g_i(g_1(t_1), \dots, g_n(t_2), t_2 - t_1)$ ist $g_i(t_2)$ als Funktion der Anfangswerte und des Skalenunterschiedes gemeint. Der Definitionsbereich sei implizit mit Einschränkungen versehen, welche die Existenz garantieren. Ω ist also eine Funktion der Anfangswerte bei t_1 und der Skalendifferenz $t_2 - t_1$.

Die Bedeutung wird im Falle einer einzigen Kopplung klar:

$$\Omega = \frac{d g(g(t_1), t_2 - t_1)}{d g(t_1)}$$

beschreibt, ob ein infinitesimales Intervall von Kopplungskonstanten vergrößert oder verkleinert wird, wenn man von t_1 nach t_2 geht. $\Omega = 0$ heißt, daß sich die Lösung von g an der Stelle t_2 nicht ändert, wenn der Anfangswert $g(t_1)$ verändert wird. Entsprechend signalisiert $\Omega \gg 1$ eine extreme Sensitivität gegenüber Anfangswertveränderungen.

Die Verbindung zu Fixpunkten wird klar, wenn $t_1 = 0$ fixiert wird und t_2 gegen Unendlich strebt. Ultraviolett stabile Fixpunkte entstehen aus Maxima von $\Omega(g(t_2), -t_2)$ (beachte die Ordnung der Argumente). Ultraviolett instabile Fixpunkte gehen aus Maxima von $\Omega(g(0), t_2)$ hervor. Für $t_2 \rightarrow -\infty$ gilt entsprechendes für Infrarot-Fixpunkte. Die Ordnung der Argumente ist frei wählbar. Soll der Fixpunktwert extrahiert werden, muß die zugehörige Skala als erstes Argument auftreten. Es ist zu beachten, daß, obwohl Ω für jedes endliche t_2 existiert, der Limes $t \rightarrow \infty$ nicht existieren muß. Trotzdem ist die Extraktion der Fixpunkte möglich.

Da oft $t_1 = 0$ gesetzt wird, führen wir noch

$$\varrho_{ij}(g(0), t) = \Omega_{ij}(g(0), t) \quad (III.16)$$

und

$$\bar{\varrho}_{ij}(g(t), t) = \Omega_{ij}(g(t), -t) \quad (III.17)$$

ein.

Die effektiven Kopplungen $g_i(t)$ sind Lösungen von expliziten, gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung gilt für eine einzige Kopplung g : $\Omega \geq 0$. Verallgemeinert zu n Kopplungen lautet die entsprechende Bedingung:

$$\omega_k \geq 0, \text{ wobei } \omega_k \text{ Eigenwert von } \Omega_{ij} \text{ ist.} \quad (III.18)$$

Die Abbildungsdichtematrix enthält, wie oben angedeutet, das Fixpunkt-konzept als Grenzfall. Für zwei beliebige, endliche Skalen bietet sie die Möglichkeit, die Sensitivität gegenüber Anfangswerten auszudrücken. Da hier der Transport von Kopplungen zu endlichen Einbettungsskalen untersucht wird, sind Minima und Maxima von ϱ und $\bar{\varrho}$ interessante Punkte.

Minima von ϱ mit $\varrho \ll 1$ gehören zu einem Skalen- und Kopplungsbereich der stark verdichtet wird. Die Wirkung ist der eines Fixpunktes ähnlich. Für einen ganzen Bereich von Kopplungen bei $t = 0$ werden die Lösungen "angezogen". Maxima von ϱ mit $\varrho \gg 1$ wirken umgekehrt. Hier werden kleine Anfangswertintervalle in große Bildintervalle abgebildet. Dies entspricht in gewisser Weise einem repulsiven Fixpunkt.

Das Konzept des Zwischenfixpunktes wird eingeführt, um diese Analogie auszudrücken. Zwischenfixpunkte sollen einem einem Fixpunkt entsprechendes Verhalten der Kopplungen bei beliebigen Skalen zugeordnet sein, also Minima und Maxima von ϱ und $\bar{\varrho}$ im erlaubten Skalenbereich. Um den Zwischenfixpunktwert bei einer Skala t zu extrahieren, ist jene Abbildungsdichtematrix zu verwenden, die als erstes Argument t besitzt. Minima dieser Abbildungsdichte sind attraktive Zwischenfixpunkte, und Maxima sind repulsive Zwischenfixpunkte.

Um einen möglichen Zwischenfixpunkt zu finden, kann aber auch das Anwachsen oder Abnehmen von ϱ und $\bar{\varrho}$ betrachtet werden, solange der Fixpunktwert nicht interessiert.

Dieses Konzept ist viel allgemeiner als das des Fixpunktes. Zum Beispiel kann es passieren, daß für eine Skala ein attraktiver Zwischenfixpunkt auftritt und diese Kopplung für höhere Werte keinerlei herkömmliche Fixpunkte hat. Im Extremfall kann die Zwischenfixpunktstruktur sogar total verschieden von der herkömmlichen

Fixpunktstruktur sein. Um das Konzept zu verdeutlichen, sind hier noch einige extreme Beispiele konstruiert.

In Abbildung III.1 ist ein attraktiver Zwischenfixpunkt illustriert. Der hier gezeigte hypothetische Fluß einer einzigen Kopplungskonstante kann nur in einem gekoppelten System auftreten. Wichtig an dem Beispiel ist, daß für $t \rightarrow \infty$ keinerlei Fixpunkte auftreten und trotzdem ein Zwischenfixpunkt bei einer endlichen Skala existiert. Für das angestrebte Programm wäre dann die Identifizierung dieser Skala mit einer Einbettungsskala eine besondere Situation, wobei der Zwischenfixpunkt wie ein herkömmlicher Fixpunkt wirkt.

Abbildung III.2 stellt die zu Abb. III.1 konträre Situation eines repulsiven Zwischenfixpunktes dar.

Sehr interessant ist auch die Frage nach Zwischenfixpunkten bei $t = 0$. Dazu muß der Renormierungsgruppenfluß von einer anderen Anfangsskala aus betrachtet werden. In Abb. III.3 ist ein attraktiver Zwischenfixpunkt und ein herkömmlicher Fixpunkt angedeutet. Im Beispiel sind die Kopplungswerte gleich, was im allgemeinen nicht der Fall ist. Das heißt, das Zusammenspiel von Zwischenfixpunkten und Fixpunkten kann sehr komplexe Ergebnisse liefern.

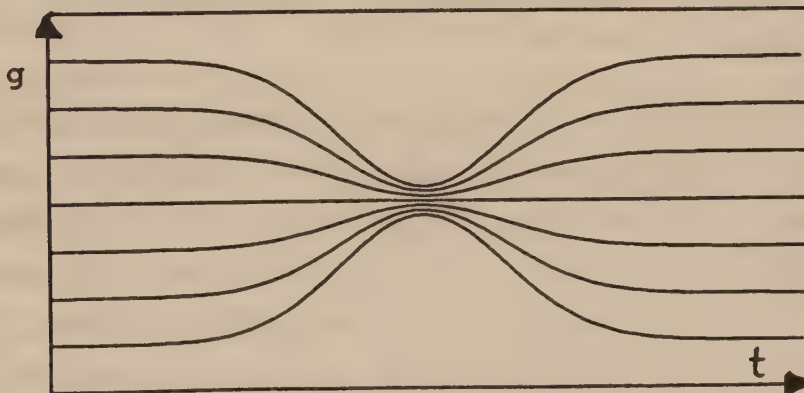


Abb. III.1: Attraktiver Zwischenfixpunkt

Das Konzept des Zwischenfixpunktes erlaubt es, physikalisch interessante Fragen zu stellen. Da hier ohne Kenntnis einer Einbettungsskala nach denkbaren Einbettungen gesucht wird, ist das Zusammenspiel von Zwischenfixpunkten mit Einbettungsskalen sehr wichtig. In den später betrachteten Modellen werden von Landau-Singularitäten herrührende Zwischenfixpunkte wichtig. Also Extrema von g und $\bar{g}$ bei einer Skala nahe der Singularität.

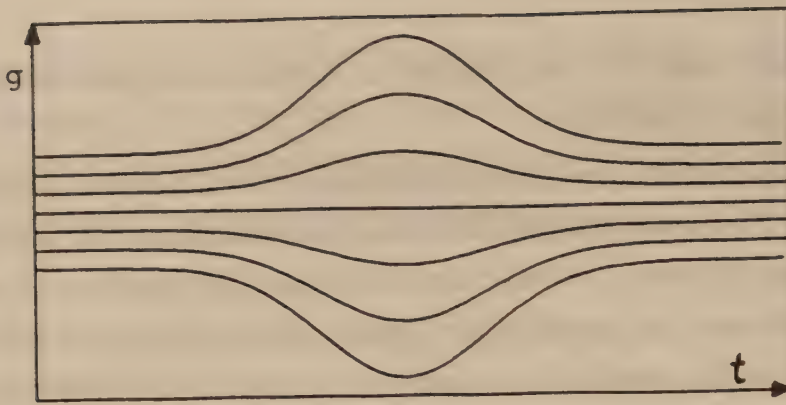


Abb. III.2: Repulsiver Zwischenfixpunkt

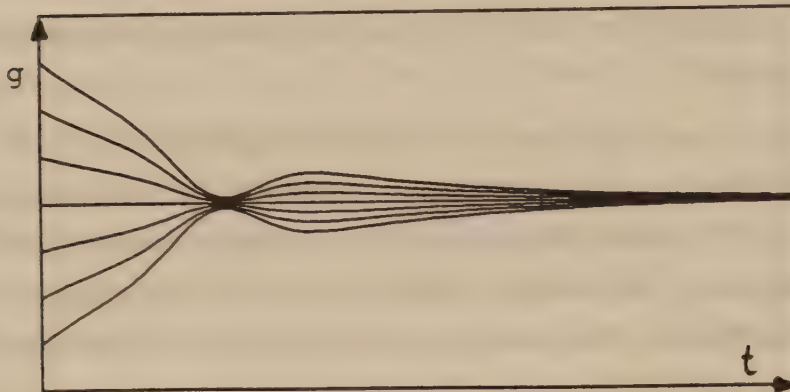


Abb. III.3: Zwischenfixpunkt und herkömmlicher Fixpunkt

Was bedeuten nun attraktive oder repulsive Zwischenfixpunkte bei hohen Skalen physikalisch für ein einzubettendes Modell, falls die Kopplungen im entsprechenden Bereich liegen? Ein attraktiver Zwischenfixpunkt würde erfordern, daß die Einbettung diesen Wert grob erklärt. Durch die starke Sensitivität kann bei niedrigen Skalen (durch Vernachlässigung von Schwelleneffekten, höheren Ordnungen etc.) keine Kopplung gut berechnet werden. Anders herum kann der Wert der Kopplung bei hohen Skalen als gut bekannt vorausgesetzt werden, selbst wenn Kopplungen bei niedrigen Skalen nicht oder schlecht bekannt sind.

Ein repulsiver Zwischenfixpunkt bei hohen Energien erlaubt große Bereiche für die Kopplung bei der Einbettungsskala. Der entsprechende Wert bei niedrigen Skalen ergibt sich daraus grob.

Beide Möglichkeiten sind in gewisser Hinsicht konträr. Wenn die Kopplung bei niedrigen Skalen erklärt wird, hat die Einbettung mehr Freiheit für die Kopp-

lungskonstante. Ist die Kopplung bei der Einbettungsskala durch einen attraktiven Zwischenfixpunkt fixiert, kann der Wert bei niedrigen Skalen schlecht daraus berechnet werden. Dafür ist aber die Einbettung stark eingeschränkt.

Ergibt die Analyse einen attraktiven Zwischenfixpunkt bei $t = 0$ so heißt dies, daß diese Kopplung bevorzugt ist. Der Wert wird für beliebige Einbettungsskalen bei $t = 0$ approximativ angenommen. Somit wird die Kopplung bei beliebigen Skalen weniger präzise fixiert. Ein repulsiver Zwischenfixpunkt bei $t = 0$ wirkt genau umgekehrt; um die Kopplung bei $t = 0$ zu erhalten, muß der Wert bei beliebiger Skala sehr präzise fixiert werden.

Generell kann auch noch ein komplexes Zusammenspiel von Zwischenfixpunkten bei $t = 0$, Zwischenfixpunkten bei $t \neq 0$ und gewöhnlichen Fixpunkten auftreten. Die Diskussion ist dann entsprechend durch Kombination obiger Situationen durchzuführen.

III.3 Struktur

Strukturanalysen sind im Idealfall ein gezieltes Suchen nach speziellen Parameterwerten, im einfachsten Fall eine Situation, in der alle unabhängigen Parameter bei einer Skala identisch werden. Viele andere Situationen sind denkbar, wie zum Beispiel eine Parameterstruktur, die einfachen Gesetzmäßigkeiten genügt. Wie in der Einleitung skizziert, gibt es einen scheinbaren Zusammenhang von Parametern des Standardmodells mit dem Renormierungsgruppenfluß zu hohen Skalen. Beispiele waren die effektiven Eichkopplungen und die Fermionmassen. Da die erste Eigenschaft sich als ziemlich allgemein erweist, sollen hier die Möglichkeiten der Parameterrenormierung in einem möglichst unspezifischen Rahmen untersucht werden. Speziell die Massenparameter sind dabei interessant. Da Massen vermutlich erst mit der Gravitation fundamental erklärt werden, und die Gravitation mit der Planck-Skala assoziiert ist, erscheint es möglich, daß die Transformation zu hohen Skalen interessante Strukturen liefert.

Da aber der Begriff Struktur allgemein schwer zu fassen ist, wird das Vorgehen hier folgendermaßen sein: Für alle praktischen Fälle, die betrachtet werden, ist ein Teil der Parameter mehr oder weniger gut experimentell bekannt. Wenn diese Parameter als Konstanten eingesetzt werden, sind die Lösungen nur noch Funktionen der

unbekannten Variablen. Die so parametrisierten Lösungen sind die Voraussetzung für eingeschränkte Strukturanalysen, jedoch wird auch die Sensitivität der fixierten Parameter geprüft. Je nach betrachteter Theorie werden einige explizite Strukturfragen gestellt. Für kompliziertere Fragen sind die Lösungen bereitgestellt, und sollte eine Einbettung eine gewisse Struktur erfordern, so kann dies sofort mit den bereitgestellten Lösungen überprüft werden. Die Frage lautet dann: Kann für eine Skala durch Anpassung der freien Parameter und Ausschöpfung der experimentellen Fehler der fixierten Parameter die gewünschte Struktur explizit erzeugt werden?

Ein sehr bekanntes Beispiel ist Grundlage der GUT's. Es gibt eine Skala, bei der die drei unabhängigen Eichkopplungen sich bei einem Wert treffen [24]. Diese einfache Struktur wird für die Einbettung aller Eichkopplungen in ein $SU(5)$ Eichfeld benützt, aber viele andere Strukturen sind denkbar, so daß eine allgemeine Aussage schwierig ist. Einige sehr auffällige Strukturmöglichkeiten werden explizit diskutiert werden.

III.4 Die wahrscheinlichsten Parameter

In Unkenntnis der Einbettung und der dadurch gegebenen Parameter bei der Einbettungsskala kann man die Fragestellung nach Struktur auch umkehren. Dies geschieht, indem man alle Parameter an der Einbettungsskala alle möglichen Werte mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen läßt. Diese Gleichverteilung wird dann durch den Renormierungsgruppenfluß zu niedrigen Skalen transformiert. Durch Abbildungsdichten $\Omega \neq 1$ wird die Gleichverteilung zerstört und eine modifizierte Wahrscheinlichkeitsverteilung erzeugt. Diese gibt Parameterwahrscheinlichkeiten unter der Annahme maximaler Unkenntnis der Parameterstruktur an. Sollten in dieser Verteilung Hügel auftreten, dann gehören sie zu bevorzugten Parametern. Die integrierte Größe dieser Hügel beinhaltet, wie stark diese Werte bevorzugt sind.

Sei $\Gamma_t(g(t))$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung bei t und $\Gamma_0(g(0))$ die bei $t = 0$, dann gilt folgender Zusammenhang zur Abbildungsdichte:

$$\Gamma_0(g(0)) = \frac{\Gamma_t(g(t))}{\bar{\varrho}(g(t), t)} . \quad (III.19)$$

Gleichverteilung bei der Einbettungsskala bedeutet

$$\Gamma_t(g(t)) = c = \text{konstant} . \quad (III.20)$$

Die Parameterwahrscheinlichkeit bei niedrigen Energien ist somit

$$\Gamma_0(g(0)) = \frac{c}{\bar{\varrho}(g(t), t)} . \quad (III.21)$$

und der Zusammenhang zu Zwischenfixpunkten wird klar. Liegt ein repulsiver Zwischenfixpunkt vor, so ergibt sich daraus eine hohe Wahrscheinlichkeit für die zugehörigen Parameter bei $t = 0$. Ein attraktiver Zwischenfixpunkt ergibt umgekehrt sehr unwahrscheinliche Parameterwerte bei $t = 0$.

Sollte in gewissen Einbettungstypen eine Bevorzugung von Parametern auftreten, so kann dies mittels $\Gamma_t(g(t))$ ebenfalls in die Analyse der wahrscheinlichsten Parameter einbezogen werden.

IV. Standardmodell Renormierungsgruppenfluß

In diesem Kapitel soll das Standardmodell mit den in Kapitel III gezeigten Methoden untersucht werden. Im Anhang A ist das Standardmodell skizziert. Die verwendeten Daten sind in Anhang B aufgelistet. Die 1-Schleifen- β -Funktionen sind in ihrer Gesamtheit in Anhang C angegeben. Die freien Parameter sind die Einbettungsskala t_E , die Zahl der Generationen $N (\geq 3)$, die top-Quark-Masse m_t , die Higgs-Masse m_H und, im Fall von mehr als drei Generationen, alle weiteren Fermionmassen und Mischungsparameter. Alle anderen Parameter werden als bekannt vorausgesetzt (die Fehler dazu sind jeweils im Anhang B angegeben). Die zugehörige Bibliographie wird ebenfalls in den Anhängen angegeben.

Zuerst werden die vom Modell vorgegebenen Sektoren für $N = 3$ diskutiert; dann anschließend im selben Abschnitt in einer Näherung für beliebiges N . Am Schluß des Kapitels folgt eine Betrachtung des Gesamtsystems. Auf diese Weise können die Möglichkeiten in den einzelnen Sektoren besprochen und gleichzeitig die Voraussetzungen für die abschließende Gesamtdiskussion geschaffen werden. Die Parameterwahrscheinlichkeiten werden am Schluß des Kapitels diskutiert.

Da die Renormierungsgruppengleichungen nicht von allen Variablen abhängen, empfiehlt sich eine entsprechend geordnete Analyse, und da Eichkopplungen nur von Eichkopplungen abhängen, werden diese zuerst untersucht. Die Yukawa-Kopplungen hängen von sich selbst und von den Eichkopplungen ab und werden als nächstes untersucht. Die von allen Kopplungen abhängende Higgs-Kopplung wird am Schluß betrachtet.

IV.1 Die Eichkopplungen

Aus den β -Funktionen für die Eichkopplungen (Anhang C, Gl. (IX.1) und (IX.2))

$$\frac{dg_i^2(t)}{dt} = \beta_i = c_i g_i^4(t) \quad (IV.1)$$

$$c_1 = \frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{20}{9}N + \frac{1}{6} \right], \quad c_2 = \frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{4}{3}N - \frac{43}{6} \right], \quad c_3 = \frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{4}{3}N - 11 \right] \quad (IV.2)$$

findet man sofort die bekannten Lösungen [65]:

$$g_i^2(t) = \frac{g_i^2(0)}{1 - g_i^2(0) c_i t} . \quad (IV.3)$$

Falls $c_i < 0$ gilt, handelt es sich für große t um eine asymptotisch freie Kopplung. Der Fall $c_i = 0$ würde einer konstanten Kopplung entsprechen. Für $c_i > 0$ entwickelt $g_i^2(t)$ eine Landau-Singularität bei

$$t_i = \frac{1}{c_i g_i^2(0)} \quad (IV.4)$$

oder

$$\Lambda_i = M_Z \cdot 10^{(t_i \log e)} . \quad (IV.5)$$

Die Konstanten c_i in (IV.2) hängen von der Zahl der Generationen ab. c_1 ist stets positiv und c_2 ist größer als Null wenn $N > 5$ und c_3 für $N > 8$.

Für $N = 3$ ist $c_1 > 0$ und c_2, c_3 sind kleiner Null. Die Singularität von g_1^2 liegt dann mit den Daten aus Anhang B bei $t \simeq 91$. Dies entspricht einer Skala $\Lambda \simeq 10^{42} \text{ GeV}$ [66]. Da die Gravitation jenseits der Planck-Skala ($\Lambda_{Pl} \simeq 10^{19} \text{ GeV}$) relevant wird, sollte diese Singularität bedeutungslos sein, da das Standardmodell vorher einzubetten ist.

Mögliche Fixpunkte und Struktur sollen anschließend für beliebiges N diskutiert werden.

Wenn nun N nicht fixiert ist, entwickelt $g_1^2(t)$ immer eine Singularität, während $g_2^2(t)$ und $g_3^2(t)$ nur für genügend große N entsprechende Probleme haben. Sollte die Trivialität für den Eichsektor ein Problem sein, kommt im Standardmodell auf dem 1-Schleifen-Niveau nur eine Einbettung zur Vermeidung der Probleme in Frage.

In Abb. IV.1 sind die Singularitäten Λ_i als Funktion von N gezeichnet. Dabei stammen die verwendeten Anfangswerte aus Anhang B. Eine Einbettungsskala Λ_E müßte kleiner als alle Λ_i sein (schraffiertes Gebiet). Weiterhin ist $N < 3$ und $\Lambda \leq 100 \text{ GeV}$ ausgeschlossen.

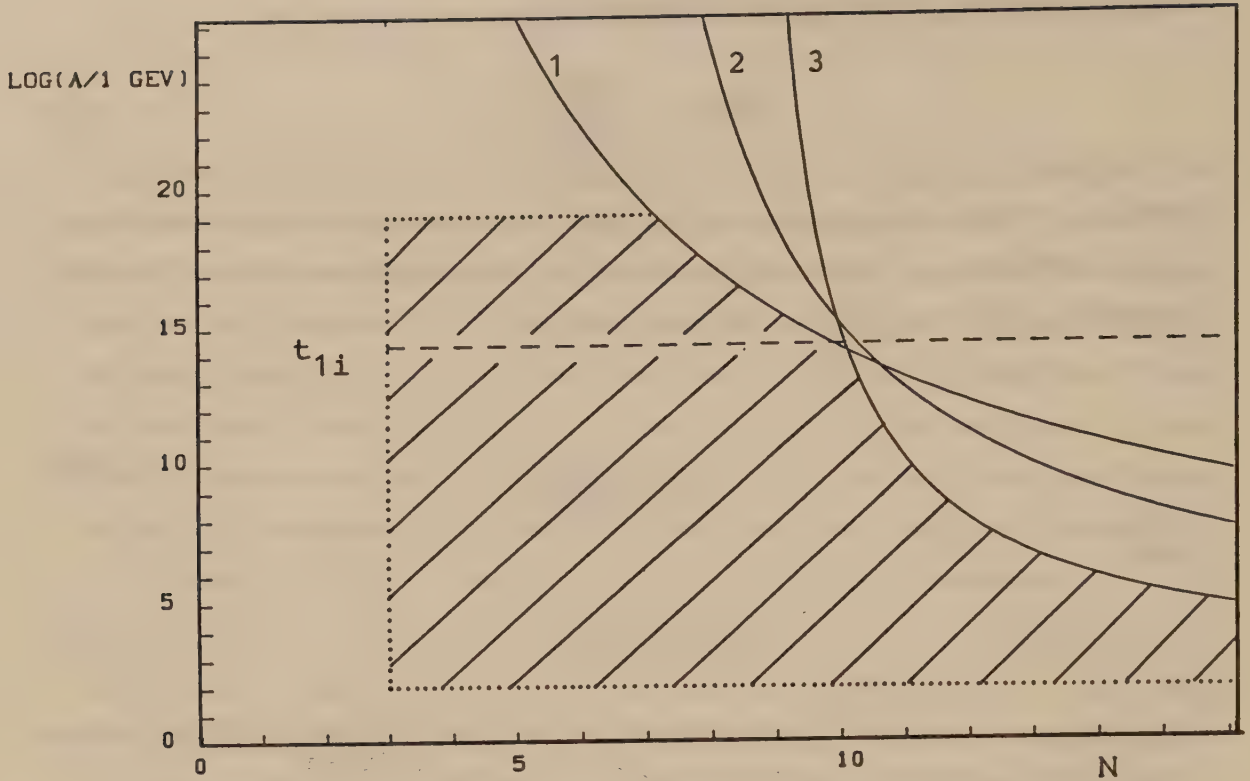


Abb. IV.1: Die Trivialitätsgrenzen der Eichkopplungen. Die drei durchgezogenen Kurven sind die Grenzen, wobei die Nummer der Kurve die zugehörige Gruppe angibt. Gepunktet sind die experimentellen Untergrenzen und die Gravitationsobergrenze für N und Λ eingezeichnet. Die gestrichelte Linie gibt die Vereinheitlichungsskala der drei Kopplungen als Funktion von N an (siehe Text).

Die gezeigten Grenzen sind Beschränkungen für die Skalen für den Fall, daß die Trivialität für diesen Sektor eine Rolle spielt*. Die Ergebnisse sind sehr stabil bezüglich der nächsten Ordnung der Störungstheorie, da das Anwachsen der Kopplungen zu großen Werten in einem sehr engen Bereich geschieht (dies ist im wesentlichen gleichbedeutend mit den Selbstverstärkungseigenschaften der untersuchten Differentialgleichung). Daher führen auch Bedingungen wie $g_i^2 < 4\pi$ (also $\alpha < 1$) zu nahezu identischen Bedingungen wie die hier gezeigten.

*Wie schon in Kapitel III angedeutet gibt es Anzeichen dafür, daß Trivialitätsprobleme in vielen nicht asymptotisch freien Theorien auftreten [59].

Für den Fall, daß die Eichkopplungen nicht von der Trivialität bedroht sind, wären die gezeigten (oder besser die fast identischen, mit $g^2 < 4\pi$ abgeleiteten) Grenzen Beschränkungen für die Skalen für die Gültigkeit der Strömungsrechnung. Entsprechende Skalenbeschränkungen müssen also für die anderen Kopplungen vorgenommen werden, da die 1-Schleifen-Eichkopplungen in den anderen β -Funktionen enthalten sind.

Als nächstes soll die Abbildungsdichte der Eichkopplungen untersucht werden. Aus den Lösungen (IV.3) folgt die diagonale Abbildungsdichtematrix

$$\varrho_{ij}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-c_1 g_1^2(0)t)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-c_2 g_2^2(0)t)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1-c_3 g_3^2(0)t)^2} \end{pmatrix}. \quad (IV.6)$$

Bei den Diagonalelementen handelt es sich je nach c_i um monoton wachsende oder fallende Funktionen von $(g_i^2(0)t)$. t muß entsprechend Abb. IV.1 eingeschränkt sein, da sonst diese Lösungen nicht mehr gültig sind. Im Falle einer Beschränkung von t aus Trivialitätsgründen, ist die Gültigkeit automatisch sichergestellt.

Falls $c_i > 0$ gilt, wächst das entsprechende Diagonalelement von ϱ_{ij} monoton mit t und explodiert an der Landau-Singularität. Damit kann in diesen Fall nur ein instabiler Zwischenfixpunkt auftreten. Lediglich dann, wenn t nahe an die zu dieser Kopplung gehörende Singularität herankommt, ist dieser instabile Zwischenfixpunkt stark ausgeprägt. In Abb. IV.1 kann abgelesen werden, welche Kopplung einen stark ausgeprägten instabilen Zwischenfixpunkt haben kann. Für ein gegebenes N ist das die Λ nach oben limitierende Kopplung; also die $U(1)$ -Kopplung für $N \leq 10$ und die $SU(3)$ -Kopplung für $N \geq 10$. An den Schnittpunkten der Abb. IV.1 ($N \simeq 10$) können zwei (oder drei) Kopplungen gleichzeitig einen stark ausgeprägten instabilen Zwischenfixpunkt haben.

Physikalisch bedeutet dieser instabile Zwischenfixpunkt eine sehr große Sensitivität der Kopplung bei hohen Skalen gegenüber der verwendeten Kopplung bei niedriger Energie. Das heißt, daß zu dem verwendeten Anfangswert bei niedriger Energie (zuzüglich Fehler), ein großes Intervall bei hoher Energie gehört. Die Kopplung bei niedriger Energie wird durch die Kopplungen bei der Einbettung approximativ erzeugt, wenn diese ganz grob im richtigen Bereich liegt.

Falls $c_i \leq 0$ ist, sind die Diagonalelemente von ϱ_{ij} monoton fallende, positive Funktionen von $(g_i^2(0)t)$. Da keine Skala ausgezeichnet ist, gibt es dann keinen Zwischenfixpunkt.

Interessanterweise schneiden sich die drei Kurven für die Pole der Eichkopplungen in Abb. IV.1 nahezu in einem Punkt ($N \simeq 10$, $\Lambda \simeq 10^{15} \text{ GeV}$). Das heißt, daß es innerhalb der Fehler möglich ist, eine Situation zu finden, in der alle drei Eichkopplungen simultan an der selben Skala explodieren. Da die Schnittpunkte durch die unabhängigen experimentellen Daten für $g_i^2(0)$ (Anhang B) gesetzt werden, scheint dies auf einen tieferen Zusammenhang hinzudeuten. Diese Eigenschaft ist außerdem von keiner weiteren Annahme abhängig.

Im Hinblick auf mögliche Strukturen innerhalb der Eichkopplungen dürfte wohl das minimale $SU(5)$ -GUT-Model [29, 67, 68] am bekanntesten sein. Die drei dort auftretenden Eichkopplungen treffen sich bei einer Skala $M_X \simeq 10^{15} \text{ GeV}$ ($N = 3$). Dort wird durch eine Einbettung daraus eine eindeutige $SU(5)$ Eichkopplung.

Die $U(1)$ -Kopplung muß jedoch vorher wegen der Identifizierung mit dem $U(1)$ -Generator in der $SU(5)$,

$$T_B = \sqrt{\frac{3}{5}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (IV.7)$$

und der Existenz von Multipletts der Form (u, d, ν_e, e) , ... mit dem Faktor $\sqrt{\frac{5}{3}}$ multipliziert werden [69]. Diese Umskalierung der $U(1)$ -Kopplung ist aber ein allgemeiner Gesichtszug von Vereinheitlichungen mit einfachen Gruppen und den angedeuteten Fermion-Multipletts.

Die Frage nach der Möglichkeit der Vereinheitlichung der Eichkopplungen für beliebiges N liefert ein überraschendes Ergebnis. Der Schnittpunkt t_{1i} der Kopplungen $\frac{5}{3}g_1^2(t)$ und $g_2^2(t)$ (oder $g_3^2(t)$) ist gegeben durch:

$$t_{1i} = \frac{\frac{3}{5g_1^2(0)} - \frac{1}{g_i^2(0)}}{\frac{3}{5}c_1 - c_i}; \quad (i = 2, 3). \quad (IV.8)$$

Der Zähler ist konstant durch die experimentellen Daten fixiert. Der Nenner ist generell N abhängig.

Es ist aber

$$\frac{3}{5}c_1 - c_2 = \frac{109}{15} = \text{konstant} \quad (IV.9)$$

und

$$\frac{3}{5}c_1 - c_3 = \frac{111}{10} = \text{konstant} . \quad (IV.10)$$

Somit sind die Schnittpunkte nicht von N abhängig [70], was zur Möglichkeit führt, die Eichkopplungen für beliebiges N zu vereinheitlichen, wenn für ein gegebenes N die Eigenschaft $t_{12} = t_{13}$ erfüllt ist. Da dies für $N = 3$ innerhalb der Fehler der Kopplungen möglich ist (GUT's), kann es auch für beliebiges N erreicht werden. In Abb. IV.1 ist dieser Skalenwert eingezeichnet. Die zugehörige Linie läuft in den oben als speziell bezeichneten Schnittpunkt der Pollinien (N unabhängig) hinein. Man beachte, daß genau dann die drei Pole sich exakt in einem Punkt treffen. Somit ist die Vereinheitlichung der Eichkopplungen ein N -unabhängiger Gesichtszug. Die zugehörige Skala ist konstant und es hängt nur der Wert der Kopplung bei dieser Skala von N ab. Im Extremfall, für $N \simeq 10$, erhält man hierbei die so bezeichnete nichtperturbative Vereinheitlichung [71, 72, 73]. Bemerkenswert an dieser Situation ist, daß die instabilen Zwischenfixpunkte alle gleichzeitig stark ausgeprägt sind. Das heißt, daß der Wert der Kopplungen bei der Einbettungsskala irrelevant (aber groß) wird, und die Kopplungen des Standardmodells bei niedrigen Energien daraus automatisch folgen.

IV.2 Yukawa-Kopplungen

Die in Anhang C angegebenen β -Funktionen legen als nächstes die Analyse der Yukawa-Kopplungen nahe, da diese nur von gelösten Eichkopplungen und Yukawa-Kopplungen abhängen. Diese gekoppelten Matrix-Differentialgleichungen sind reich strukturiert, und eine geschlossene Lösung ist nicht bekannt. Für ein gutes Verständnis sollte man zuerst einige Spezialfälle diskutieren, und anschließend die Eigenschaften der allgemeinen Lösungen erörtern. Bisherige Ergebnisse beschränken sich auf Spezialfälle und numerische Simulationen. Sehr bekannt sind die numerischen Simulationen in [74]. Weitere numerische Analysen sind [75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82]. Analytische Ergebnisse für zwei Generationen sind [83, 84, 85] und Teilergebnisse für drei Generationen sind [86, 87].

In Anhang A ist gezeigt, wie man die physikalischen Parameter extrahiert. Dies sind die Eigenwerte (N Massen) und physikalische Mischungsparameter $((N - 1)^2$

Winkel und Phasen). Durch das Vorhandensein von unphysikalischen Freiheitsgraden in den Differentialgleichungen wird die Lösung des Problems noch komplizierter. Da unphysikalische Rotationen in den Anfangswerten noch frei sind, wählt man eine spezielle Basis aus. Dies ist die Basis, in der M_U und M_N diagonal sind. Durch die Lösungen wird diese Basis aber meist zerstört, so daß zusätzlich für die Lösung bei jeder Skala eine Eigenwert- und Eigenvektorbestimmung durchgeführt werden muß. Aus den Eigenwerten folgen die Massen. Die Eigenvektoren können als eine die Lösung diagonalisierende unitäre Matrix geschrieben werden, wodurch die neue Kobayashi-Maskawa-Matrix erzeugt werden kann. Diese ist aber noch mit unphysikalischen Freiheitsgraden belastet, die beseitigt werden müssen.

Da hier die Lösungen der Eichkopplungen verwendet werden, ist eine entsprechende N -abhängige Einschränkung der Skalenvariablen t angenommen (siehe Abbildung IV.1).

Die Renormierungsgruppengleichungen für Yukawa-Kopplungen (Anhang C, Gl. IX.3)

$$-16\pi^2 \frac{dM_Y(t)}{dt} = [G_Y(t) \mathbf{1} - T(t) \mathbf{1} - \frac{3}{2}S_Y(t)] M_Y(t) \quad (IV.11)$$

werden durch drei Beiträge kontrolliert: G_Y , T und S_Y . Y steht für U , D , N , E und gibt den Teilchentyp an. Kleine Buchstaben als Index kennzeichnen einzelne Quarks (siehe Anhang A). Als Anfangswerte werden $M(0) = M(\Lambda = M_Z)$ genommen. Die zugehörigen physikalischen Massen werden in Anhang E besprochen.

In $G_Y(t)$ (Gl. (IX.7-10)) ist der Einfluß der Eichkopplungen enthalten, der diagonal ist und zu einer Abnahme der Yukawa-Kopplungen führt. Die beiden anderen Terme T (Gl. (IX.6)) und S_Y (Gl. (IX.4,5)) haben ein entgegengesetztes Vorzeichen und sind für ein Anwachsen der Yukawa-Kopplungen verantwortlich. Da diese zwei Terme selbst aus Yukawa-Kopplungsmatrizen aufgebaut sind, kann dies nur passieren, wenn genügend schwere Fermionen existieren (die Elemente der Matrizen enthalten Kopplungen der Form $g = \frac{m}{v}$, wobei $m = m(M_Z)$ gilt). Da T wie G_Y diagonal im Raum der Generationen ist, kann nur S_Y zu einer Evolution der Kobayashi-Maskawa-Matrix führen.

Falls es nur leichte Fermionen gibt, wird durch die Dominanz von G_Y eine Abnahme der Yukawa-Kopplungen eintreten, die ihrerseits die Terme T und S_Y selbst

schwächt; das heißt, die Abnahme verstärkt sich dann selbst. Umgekehrt ist es möglich, daß anwachsende Yukawa-Kopplungsmatrizen sich über den selben Mechanismus in T und S_Y selbst verstärken. Dies ist zu erwarten, wenn es schwere Fermionen gibt, und in diesem Fall muß man mögliche Trivialitätsprobleme in Betracht ziehen. Während T universell auf alle Fermionen wirkt (Spur), hat S_Y ein selektives Verhalten (Matrixprodukt). Die im Anhang A skizzierte Extraktion physikalischer Parameter aus den Yukawa-Kopplungsmatrizen muß im allgemeinen für jede Skala t durchgeführt werden. Da es sich hierbei zum Großteil um die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren handelt, ist dies für den Fall, daß T und S_Y vernachlässigt werden können, sehr einfach. Somit kann die Lösung als Produkt aus einer skalenabhängigen Variablen und einer konstanten Matrix gebildet werden, und damit ist die Diagonalisierung nicht mehr von der Skala abhängig. Es ist dann folgende Differentialgleichung zu lösen:

$$-16\pi^2 \frac{dM_Y(t)}{dt} = G_Y(t) M_Y(t) . \quad (IV.12)$$

Mit dem Ansatz

$$M_Y(t) = \alpha_Y(t) \cdot M_Y(0) \quad (IV.13)$$

erhält man eine Differentialgleichung für die skalare Größe $\alpha_Y(t)$:

$$-16\pi^2 \frac{d\alpha_Y(t)}{dt} = G_Y(t) \alpha_Y(t) . \quad (IV.14)$$

Die Lösung hierzu ist:

$$\alpha_Y(t) = \exp\left[-\frac{1}{16\pi^2} \int_0^t G_Y(\tau) d\tau\right] . \quad (IV.15)$$

Da in $G_Y(\tau)$ die Lösungen der Eichkopplungen auftreten, werden für geschlossene Lösungen folgende Integrale benötigt (durch Integration von Gl. (IV.3)):

$$\int_0^t g_i^2(\tau) d\tau = -\frac{1}{c_i} \ln[1 - g_i^2(0)c_i t] . \quad (IV.16)$$

Da diese Integrale immer positive Werte haben, und die zugehörigen Koeffizienten in G_Y ebenfalls alle positiv sind, ist $\alpha_Y(t)$ eine positive, monoton abnehmende Funktion von t . Für große t strebt $\alpha_Y(t)$ gegen Null, und die Yukawa-Kopplungen

sind dann asymptotisch frei. Für das Standardmodell findet man nach dem Einsetzen der Faktoren in G_Y :

$$a_Y(t) = a_Y^1(t) a_Y^2(t) a_Y^3(t) \quad (IV.17)$$

$$a_U^3(t) = a_D^3(t) = (1 - g_3^2(0) c_3 t)^{\frac{1}{2\pi^2 c_3}} \quad (IV.18)$$

$$a_N^3(t) = a_E^3(t) = 1 \quad (IV.19)$$

$$a_Y^2(t) = (1 - g_2^2(0) c_2 t)^{\frac{9}{64\pi^2 c_2}} \quad (IV.20)$$

$$a_U^1(t) = (1 - g_1^2(0) c_1 t)^{\frac{17}{192\pi^2 c_1}} \quad (IV.21)$$

$$a_D^1(t) = (1 - g_1^2(0) c_1 t)^{\frac{5}{192\pi^2 c_1}} \quad (IV.22)$$

$$a_N^1(t) = (1 - g_1^2(0) c_1 t)^{\frac{3}{64\pi^2 c_1}} \quad (IV.23)$$

$$a_E^1(t) = (1 - g_1^2(0) c_1 t)^{\frac{15}{64\pi^2 c_1}} \quad (IV.24)$$

Um zu quantifizieren, wann diese Approximation leichter Fermionen gut ist, muß man beachten, daß die Elemente von M_Y durch den Vakuumerwartungswert $v = 175 \text{ GeV}$ normiert sind. Die Vernachlässigung von T und S_Y in Gl. (IV.11) ist gerechtfertigt, wenn darin der Beitrag vom schwersten Fermion sehr klein gegenüber G_Y ist. Der kleinste Beitrag in G_Y ist der zu g_1^2 proportionale Term in G_N mit dem Vorfaktor $\frac{3}{4}$ (siehe Anhang C). Also lautet eine typische Bedingung für die größte Fermionmasse:

$$\frac{m^2}{v^2} \ll \frac{3}{4} g_1^2(0) . \quad (IV.25)$$

Mit den numerischen Werten von $g_1^2(0)$ und v heißt dies:

$$m(M_Z) < 54 \text{ GeV} . \quad (IV.26)$$

Alle bis heute bekannten Quarks und Leptonen erfüllen diese Bedingung. Doch ist das t-Quark noch nicht gefunden*, und weitere Generationen würden diesen Wert sehr wahrscheinlich überschreiten. In frühen GUT-Überlegungen [15] wurde davon ausgegangen, daß T und S_Y für die Evolution der Yukawa-Kopplungen irrelevant ist. Damit kommen in diesem Fall alle Beiträge von den Eichkopplungen, wobei numerisch g_3^2 der alles dominierende Beitrag zu α_Y in Gl. (IV.15) ist. Die meisten Aussagen über die Parameterrenormierung in GUT-ähnlichen Theorien sind also in dieser Näherung gemacht. Spezielle Vorhersagen, wie $\frac{m_b}{m_r}$ etc., berücksichtigen oft die Terme T und S_Y nicht. Hier soll speziell auf schwere Fermionen geachtet werden, welche die Evolution der Parameter interessanter machen, da dann Nichtlinearitäten und Matrizenrotationen auftreten.

Für den Fall leichter Fermionen gibt es keinerlei Trivialitätsprobleme im Yukawa-Sektor. Da t für die Eichkopplungen entsprechend eingeschränkt ist, kann sich der Charakter der Lösungen selbst dann nicht ändern, wenn man mit den Eichkopplungen sehr nahe an die Singularität herangeht. Das führt lediglich dazu, daß α_Y noch schneller gegen Null strebt.

Für große Yukawa-Kopplungen gibt es jedoch, wie oben angedeutet, mögliche Trivialitätsprobleme. Dies kann am besten gesehen werden, wenn man annimmt, daß nur ein einziges Fermion schwer ist und alle anderen leicht. Als Beispiel kann man ein schweres t-Quark für $N = 3$ nehmen. In T und S_Y wird dann in guter Näherung nur $g_t = \frac{m_t}{v}$ berücksichtigt. Die $(3, 3)$ Komponente der Renormierungsgruppengleichungen für M_U entspricht der Evolution von g_t . Hierfür erhält man folgende Differentialgleichung :

$$-16\pi^2 \frac{dg_t(t)}{dt} = [G_U(t) - \frac{9}{2}g_t^2(t)]g_t(t) . \quad (IV.27)$$

Ein Produktansatz der Form

$$g_t(t) = g_t(0) \alpha_U(t) \beta^{\frac{3}{2}}(t) , \quad (IV.28)$$

*Es gibt jedoch Anzeichen dafür, daß $m_t > 50 \text{ GeV}$ ist [88].

mit α_U aus (IV.15), ist eine Lösung wenn gilt:

$$\beta(t) = \exp\left[\frac{3}{16\pi^2} \int_0^t g_t^2(\tau) d\tau\right]. \quad (IV.29)$$

Die hier gewählte Definition von β wird sich später in dieser Form als nützlich erweisen. Eine qualitative Lösung für nicht zu große t-Masse ($m_t < 200 \text{ GeV}$) ist

$$\beta(t) = \exp\left[\frac{3}{16} \frac{m_t^2}{\pi^2} \frac{t}{v^2}\right]. \quad (IV.30)$$

Eine numerisch zuverlässigere (approximative) Lösung [89] ist durch

$$g_t^2(t) = \frac{g_1^2(t) \exp F(g_1^2(t))}{\frac{g_1^2(0)}{g_t^2(0)} - \frac{c_t}{c_1 D} \cdot G(g_1^2(t))} \quad (IV.31)$$

gegeben, wobei

$$D = \sqrt{|B^2 - 4C|} \quad (IV.32)$$

$$B = k_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 \quad (IV.33)$$

$$C = \frac{1}{2}(B^2 - k_1 - k_2 A_2^2 - k_3 A_3^2) \quad (IV.34)$$

$$A_2 = -\frac{c_2 g_2^2(0)}{c_1 g_1^2(0)}; \quad A_3 = -\frac{c_3 g_3^2(0)}{c_1 g_1^2(0)} \quad (IV.35)$$

$$k_1 = \frac{17}{54} \frac{c_t}{c_1}; \quad k_2 = -\frac{1}{2} \frac{c_t}{c_2}; \quad k_3 = -\frac{16}{9} \frac{c_t}{c_3} \quad (IV.36)$$

$$\begin{aligned} F(x) = & -\left[(k_1 + 1) \ln\left(\frac{x}{g_1^2(0)}\right) \right. \\ & + k_2 \ln\left(1 - \frac{c_2 g_2^2(0)}{c_1 g_1^2(0)} \left(1 - \frac{g_1^2(0)}{x}\right)\right) \\ & \left. + k_3 \ln\left(1 - \frac{c_3 g_3^2(0)}{c_1 g_1^2(0)} \left(1 - \frac{g_1^2(0)}{x}\right)\right) \right] \quad (IV.37) \end{aligned}$$

$$G(x) = \ln \left(\frac{1 - \frac{2D}{B + 2C(1 - \frac{g_1^2(0)}{x}) + D}}{1 - \frac{2D}{B+D}} \right) \quad \text{wenn } N = 3 \quad (\text{IV.38})$$

$$G(x) = 2 \left(\arctg \left(\frac{2C(1 - \frac{g_1^2(0)}{x}) + B}{D} \right) - \arctg \left(\frac{B}{D} \right) \right) \quad \text{wenn } N > 3 \quad (\text{IV.39})$$

Man beachte, daß $\beta \geq 1$, und für $m_t = 0$ gilt $\beta = 1$.

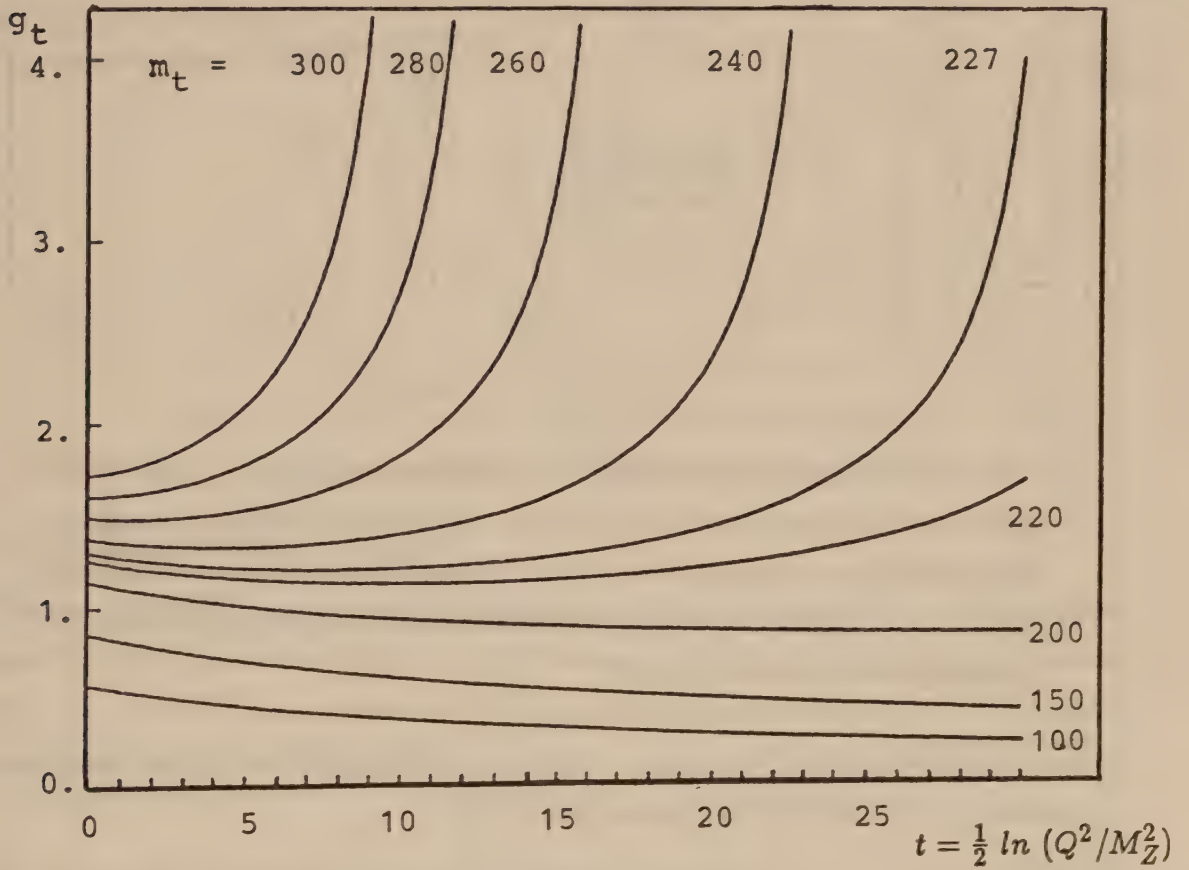


Abb. IV.2: Die Evolution einer t -Yukawa-Kopplung für $N = 3$ in der Approximation, daß nur schwere Quarks zu T und S_Y beitragen. Oberhalb eines Schwellenwertes für m_t entwickelt diese Kopplung eine Singularität, die mit wachsendem Anfangswert zu niedrigeren Skalen wandert.

In Abb. IV.2 sind die Lösungen von (IV.27) zur Illustration numerisch gezeichnet. Man sieht, daß für einen Schwellenwert der t -Masse (ca. 200 GeV) eine Singularität bei $t = \infty$ entsteht und mit zunehmenden g_t zu niedrigen Skalen wandert.

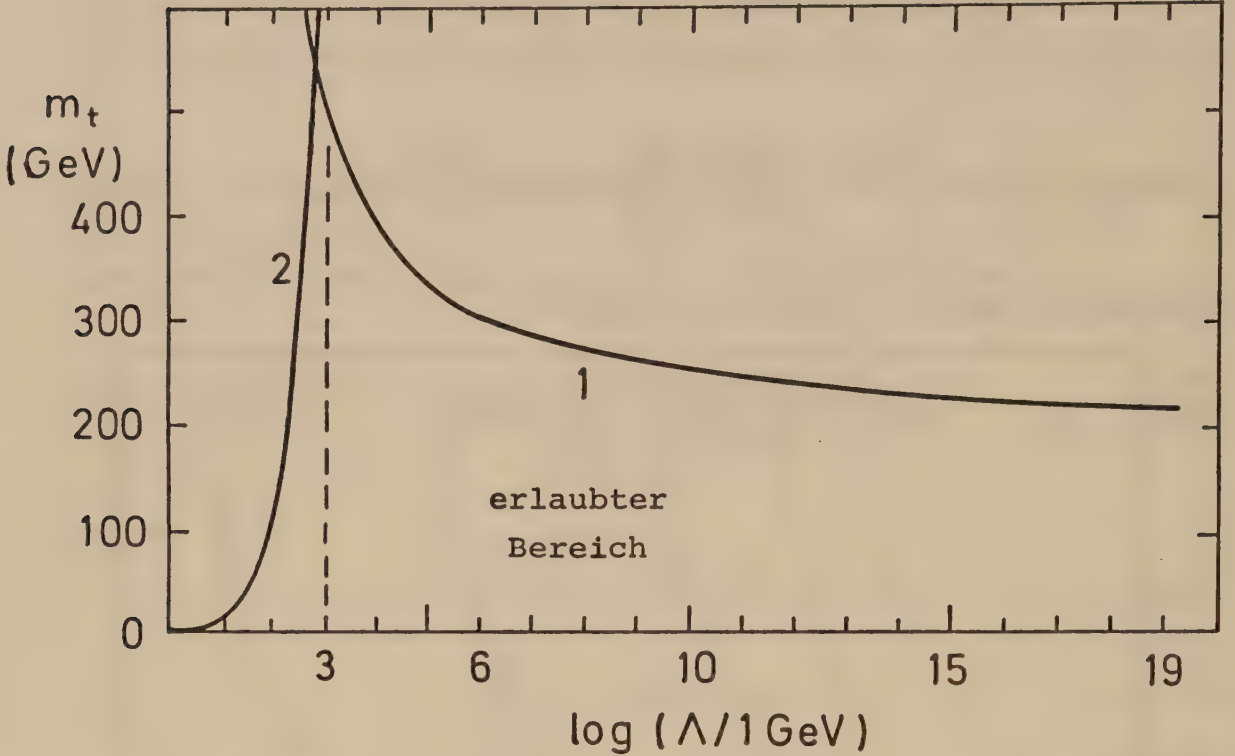


Abb. IV.3: Trivialitätsgrenzen für die t -Masse im Fall $N = 3$ als Funktion der Einbettungsskala Λ (Linie 1). Für kleine Skalen ist zusätzlich die Grenze $m_t < \Lambda$ gezeichnet (Linie 2), was sinnvollerweise erfüllt sein sollte. Die t -Masse ist bei M_Z normiert. Zur Umrechnung in physikalische Massen siehe Anhang E.

Damit ergibt sich für $N = 3$ eine t -Massen-abhängige Schranke an die Einbettungsskala, die in Abb. IV.3 dargestellt ist [88].

Der allgemeine Fall mit mehreren schweren Fermionen wird später behandelt. Die Interpretation von Abbildung IV.3 kann auch umgekehrt werden. Für eine bekannte t -Masse und $N = 3$ kann, wenn die Masse groß genug ist, eine maximale Einbettungsskala angegeben werden.

Schwere Fermionen wirken sich auf die Evolution leichter Fermionen aus. Dies wird bei Lösungen des vollen Problems für $N = 3$ sichtbar werden.

Dazu macht man folgende Approximation: In T und S_Y werden nur schwere Fermionen berücksichtigt. Das heißt hier: $T \simeq 3g_t^2$ $S_U = -S_D \simeq g_t^2 E_3$, $S_N = S_E \simeq 0$, wobei

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um die Lösung der Renormierungsgruppengleichungen nicht unnötig kompliziert zu machen, kann man möglichst einfache Anfangswerte für die Matrizen M_Y wählen. Hier wird eine Basis verwendet, in der $M_U = \mathbb{D}_U$, $M_E = \mathbb{D}_E$ diagonal ist und $M_D = U_{KM} \cdot \mathbb{D}_D$.

Es ist (siehe Anhang A)

$$\mathbb{D}_Y = \begin{pmatrix} g_{f_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & g_{f_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & g_{f_3}^2 \end{pmatrix}; \quad g_{f_i} = \frac{m_{f_i}}{v}$$

und

$$U_{KM} = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 c_3 & -s_1 s_3 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix}$$

wobei gilt: $c_i = \cos \theta_i$, $s_i = \sin \theta_i$.

Weiterhin wird für die Leptonen entweder keine Mischung, oder $M_N = 0$ angenommen. Die resultierenden Differentialgleichungen ergeben mit obiger Approximation für M_U , M_E und M_N diagonale Lösungen und die Entwicklung der Eigenwerte kann sofort abgelesen werden:

$$g_f(t) = g_f(0) \alpha_Y(t) \beta(t) \quad (IV.40)$$

$$g_t(t) = g_t(0) \alpha_U(t) \beta^{\frac{3}{2}}(t) \quad (IV.41)$$

wobei $f = u, c, e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ und $\alpha_Y = \alpha_U, \alpha_N, \alpha_E$ dem jeweiligen Teilchentyp f entsprechend. Die Matrix M_D wird mit einer diagonalen Matrix R reskaliert:

$$M_D(t) = R(t) M_D(0) \quad (IV.42)$$

$$R = \text{diag}(\alpha_D \beta, \alpha_D \beta, \alpha_D \sqrt{\beta}) \quad (IV.43)$$

$$M_D(0) = U_{KM}(0) \mathbb{D}_D(0) \quad (IV.44)$$

$M_D(0)$ ist nicht diagonal, und deshalb müssen die Eigenwerte und Eigenvektoren von $M_D(t)$ gefunden werden. Um dies zu erreichen wird die Hilfsmatrix H eingeführt:

$$H = U_{KM}^+ R U_{KM} = R + \alpha_D (\sqrt{\beta} - \beta) \bar{x} \quad (IV.45)$$

mit der Matrix

$$\bar{x} = U_{KM}^+ E_3 U_{KM} - E_3 \quad (IV.46)$$

und α_D und β aus Gl. (IV.15) und Gl. (IV.29).

Da die Mischungswinkel experimentell klein sind, wird dies für eine Entwicklung benutzt. Die Kobayashi-Maskawa-Matrix ist nur wenig von der Identität verschieden, und $\bar{x}$ enthält somit nur kleine Größen.

Um bei der Diagonalisierung die physikalisch relevanten Objekte zu erhalten wird $M_D(t) M_D^+(t)$ diagonalisiert, worin keine rechtshändigen Freiheitsgrade enthalten sind. Mit obiger Hilfsmatrix H gilt:

$$M_D(t) M_D^+(t) = U_{KM} H \mathbb{D}_D^2 H U_{KM}^+ . \quad (IV.47)$$

Es ist ausreichend die Matrix $H \mathbb{D}_D^2 H$ zu diagonalisieren, die wegen der Unitarität von U_{KM} die gleichen Eigenwerte wie $M_D(t) M_D^+(t)$ hat. Formal geschieht dies durch eine Matrix $\bar{A}$, die aus den normierten Eigenvektoren aufgebaut ist.

$$H \mathbb{D}_D^2 H = \bar{A} \bar{\mathbb{D}}_D^2 \bar{A}^+ \quad (IV.48)$$

$\bar{\mathbb{D}}_D^2$ ist eine diagonale Matrix mit den neuen Eigenwerten. Die neue Kobayashi-Maskawa-Matrix ergibt sich dann zu

$$U_{KM}(t) = U_{KM} \cdot \bar{A} . \quad (IV.49)$$

Es sind aber noch unphysikalische Freiheitsgrade zu beseitigen. Für die in dieser Arbeit gewählte Parametrisierung der Kobayashi-Maskawa-Matrix geschieht dies dadurch, daß die erste Zeile und Spalte durch Phasenrotationen an Zeilen und Spalten reell gemacht werden. Mit Hilfe von $\bar{x}$ lautet das Diagonalisierungsproblem Gl. (IV.48) dann:

$$H \mathbb{D}_D^2 H = R \mathbb{D}_D^2 R + \alpha_D (\sqrt{\beta} - \beta) [\bar{x} \mathbb{D}_D^2 R + R \mathbb{D}_D^2 \bar{x}] + \alpha_D^2 (\sqrt{\beta} - \beta)^2 \bar{x} \mathbb{D}_D^2 \bar{x} \quad (IV.50)$$

Um die Eigenwerte zu erhalten wird die Determinante von

$$H \mathbb{D}_D^2 H - \lambda_i \mathbf{1} \quad (IV.51)$$

gefunden und die starke Hierarchie der Anfangswerte benutzt ($g_b^2(0) \gg g_s^2(0) \gg g_d^2(0)$) um die neuen Eigenwerte in führender Ordnung zu berechnen.

Der Ansatz $g_s = \epsilon_1 g_b$, $g_d = \epsilon_1 \epsilon_2 g_b$ und eine Entwicklung von $\bar{x}$ in Potenzen von θ_i für beliebiges δ erlauben eine Störungsrechnung bezüglich kleiner Größen (ϵ_1 , ϵ_2 , θ_1 , θ_2 , θ_3). Dabei wird λ_3 , $\lambda_2 \lambda_3$ und $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ aus den Koeffizienten von λ , λ^2 und λ^3 der Determinante (IV.51) rekursiv berechnet. Die nächste, nicht angegebene Ordnung wird durch $+O(\dots)$ angedeutet. Man beachte, daß nur diese Methode zu sinnvollen Resultaten führt. Die Matrizen haben, wegen der Hierarchie der Massen in den Generationen, numerisch extrem verschiedene Elemente. Würde nicht auch nach ϵ_1 und ϵ_2 entwickelt, so wäre das Ergebnis für kleine Massen sehr instabil.

Durch die Rechnung erhält man folgende Eigenwerte:

$$g_b(t) = \alpha_D \beta^{\frac{1}{2}} g_b(0) \sqrt{1 + \Delta^2 L_b} \quad (IV.52)$$

$$g_s(t) = \alpha_D \beta g_s(0) \sqrt{1 + \Delta^2 L_s} \quad (IV.53)$$

$$g_d(t) = \alpha_D \beta g_d(0) \sqrt{1 + \Delta^2 L_d} \quad (IV.54)$$

mit

$$L_b = (1 - 2\Delta^{-1}) |f|^2 + O(3) \quad (IV.55)$$

$$L_s = \frac{-L_b}{1 + \Delta^2 L_b} + O(3) \quad (IV.56)$$

$$L_d = 0 + \mathcal{O}(3) , \quad (IV.57)$$

wobei $\Delta \equiv 1 - \sqrt{\beta}$ und $|f|^2 \equiv |\theta_2 + \theta_3 e^{i\delta}|^2$. Weiterhin wird mit der selben Methode die Entwicklung der Mischungswinkel berechnet. Man findet:

$$\theta_1(t) = \theta_1(0) + \mathcal{O}(3) \quad (IV.58)$$

$$\theta_2(t) = \theta_2(0) \sqrt{\beta} + \mathcal{O}(2) \quad (IV.59)$$

$$\theta_3(t) = \theta_3(0) \sqrt{\beta} + \mathcal{O}(2) \quad (IV.60)$$

$$\delta(t) = \delta(0) + \mathcal{O}(2) . \quad (IV.61)$$

Die Gleichungen (IV.40, IV.41, IV.52–IV.61) stellen in der genannten Approximation die vollständigen Lösungen der Renormierungsgruppengleichungen für physikalische Parameter bei $N = 3$ dar [90]. Das Ergebnis ist eine Funktion von β und $|f|^2$. β ist eine Funktion der t -Masse und der Skala. $f = \theta_2 + \theta_3 e^{i\delta}$ ist eine spezielle Kombination aus zwei Kobayashi-Maskawa-Winkeln und der Phase δ .

Die Lösungen demonstrieren, daß auch die leichten Quarks und die Mischungsparameter von den schweren Quarks abhängen. Interessant ist, daß die ganze Evolution nur von zwei Parametern abhängt; das sind β und $|f|$. β ist eine Funktion von m_t , und f eine Kombination aus Kobayashi-Maskawa-Winkeln.

Die möglichen Trivialitätsprobleme der t -Kopplung übertragen sich auf β und beeinflussen die Entwicklung der leichten Massen und der Kobayashi-Maskawa-Winkel. Mit diesen Lösungen kann man eine ganze Reihe numerischer Simulationen qualitativ und quantitativ sehr leicht verstehen [74, 75, 76, 77, 78, 80, 81]. Darüber hinaus können Fixpunkt- und Strukturfragen analytisch diskutiert werden.

In Abb. IV.4 wird das analytische Ergebnis dieser Arbeit mit einer numerischen Simulation für einige Datenpunkte verglichen [80] (siehe Text der Abbildung). Zusätzlich wurde das volle Problem für drei Generationen von mir numerisch simuliert, um die Gültigkeitsgrenzen der Lösungen zu finden. Es stellt sich dabei eine hervorragende Übereinstimmung für alle Massen und Skalen heraus. Die Größe $|f|$ muß kleiner als ca. $\frac{1}{2}$ sein, um Fehler kleiner als 5% zu erhalten. Für kleinere $|f|$ wird die Präzision sehr schnell extrem gut.

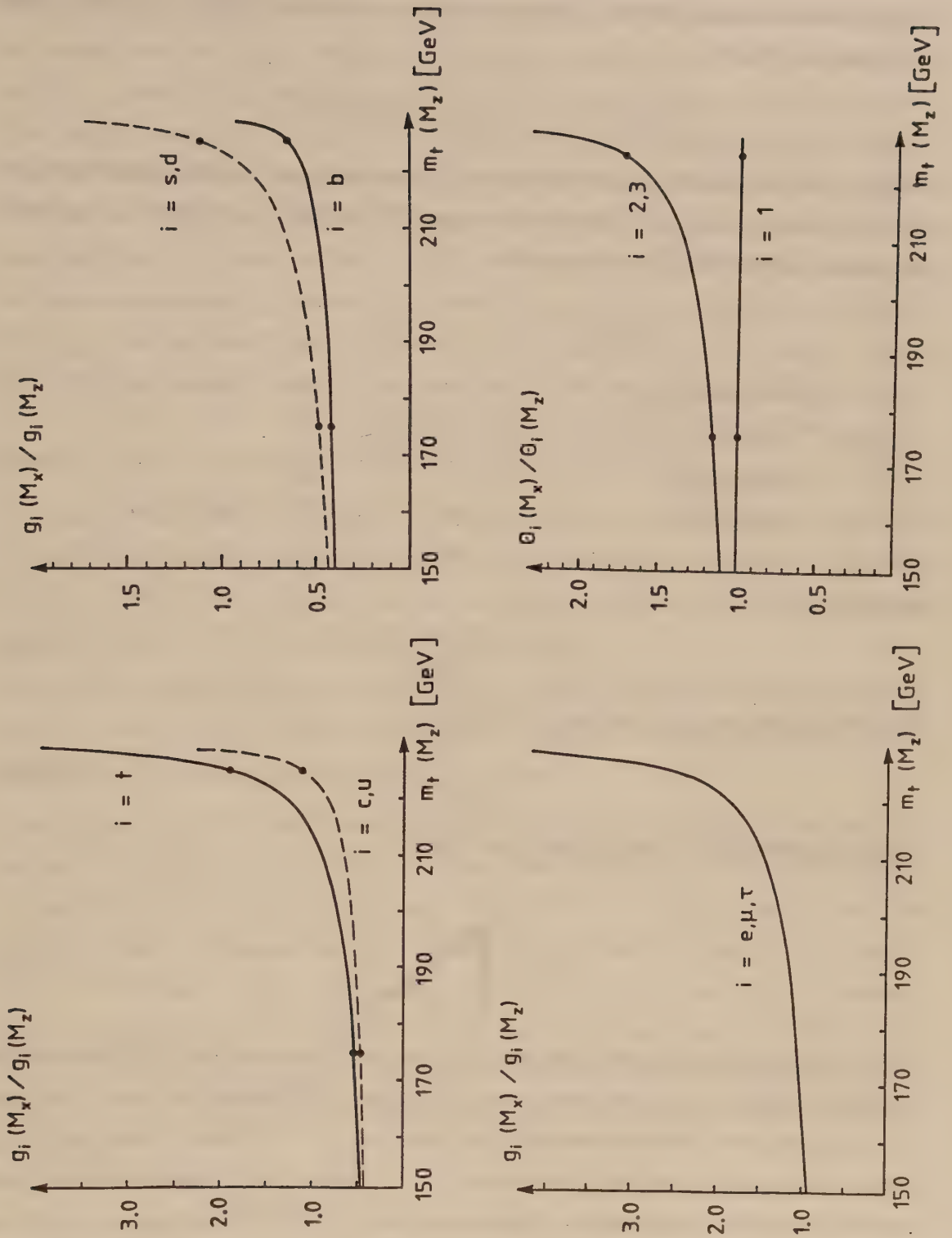


Abb. IV.4: Vergleich der hier erzielten analytischen Ergebnisse mit der numerischen Simulation [80] bei gleichen Anfangswerten. Die Linien sind die hier erzielten Ergebnisse und die Punkte beziehen sich auf die Arbeit [80].

Um die Abbildungsdichtematrix aufzuschreiben, ordnen wir dafür alle Kopplungen auf folgende Weise:

$$t, b, \nu_\tau, \tau^-, c, s, \nu_\mu, \mu^-, u, d, \nu_e, e^- .$$

Hierbei sind die Generationen absteigend angeordnet und in jeder Generation ist die Ordnung wie u, d, ν, e . Mit den Lösungen (IV.40, IV.41, IV.52–IV.61) schreibt sich dann die Abbildungsdichtematrix:

$$\varrho_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_U \beta^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \alpha_U g_t^2(0) \beta' & 0 & 0 & 0 & ..0.. \\ \frac{1}{2} \alpha_D \beta^{-\frac{1}{2}} g_b(0) \beta' \sqrt{1 + \Delta^2 L_b} & \alpha_D \beta^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \Delta^2 L_b} & 0 & 0 & ..0.. \\ \alpha_N g_{\nu_t a u}(0) \beta' & 0 & \alpha_N \beta & 0 & ..0.. \\ \alpha_E g_{e^-}(0) \beta' & 0 & 0 & \alpha_E \beta & ..0.. \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad (IV.62)$$

Hierbei ist

$$\beta' = \frac{d\beta(g_t(0), t)}{dg_t(0)} . \quad (IV.63)$$

Mit der approximativen Lösung (IV.30) gilt:

$$\beta' = \frac{3}{8\pi^2} g_t(0) \beta \quad (IV.64)$$

Da die Eigenvektoren einer Matrix der Form

$$M = \begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ \nearrow & & 0 \\ 0 & & \searrow \end{pmatrix} \quad (IV.65)$$

durch die Diagonalelemente gegeben sind, ist eine Diskussion der Abbildungsdichten sofort möglich. Vernachlässigt man die kleinen Mischungen, so sind außer dem (1,1)-Element alle Diagonalelemente der Form $\alpha_Y \beta^k$. Für das b -Quark ist $k = \frac{1}{2}$ und für alle anderen leichten Quarks ist $k = 1$. Die in (IV.15) definierten α_Y sind positive, monoton abnehmende Funktionen von t . Für $t = 0$ ist $\alpha_Y = 1$. Die in (IV.29) definierte Größe β ist monoton wachsend, und für $t = 0$ gilt $\beta = 1$. Somit sind die Produkte $\alpha_Y \beta^k$ möglicherweise kleiner oder größer als Eins. Das (1,1)-Element hat ebenfalls einen Term $\alpha_U \beta^{\frac{3}{2}}$ und einen Zusatzterm $\frac{3}{2} \alpha_U g_t(0) \beta'$.

Für eine kleine t -Masse wirkt nur α_Y , und damit ist das Ergebnis kleiner als Eins. Mit anwachsender t -Masse werden die Faktoren größer, da $\beta > 1$ ist. Der Wert $\alpha_Y \beta^k = 1$ wird für die verschiedenen Quarks bei verschiedenen t -Massen erreicht. Dies kommt von den in α_Y mit verschiedener Stärke beitragenden Eichkopplungen und den verschiedenen Potenzen von β . Damit kann man sich durch die Wahl der t -Masse die Abbildungsdichte in Grenzen aussuchen, wobei aber eine Ordnung innerhalb der Fermionen auftritt. Für $N = 3$, $\Lambda = 10^{15} \text{ GeV}$ erreichen die mit Leptonen assoziierten ϱ_{ii} zuerst Eins. Dann folgt ϱ_{11} für das t -Quark. Als nächstes jene ϱ_{ii} , die zu leichten Quarks gehören. Zuletzt folgt ϱ_{22} für das b -Quark. Für das (1,1)-Element kann man die Approximation (IV.30) verwenden und findet dann

$$\varrho_{11} = \alpha_U \beta (\beta^{\frac{1}{2}} + \frac{9}{16\pi^2} g_t^2) \simeq \alpha_U \beta^{\frac{9}{2}}. \quad (\text{IV.66})$$

Der zweite Term im (1,1)-Element wirkt also qualitativ so, daß die Potenz von β von $\frac{3}{2}$ auf $\frac{9}{2}$ wächst und damit wird das (1,1)-Element noch größer. Vergleicht man Gl. (IV.27) und die zu dieser einen Kopplung gehörige Abbildungsdichte, wird das Ergebnis für ϱ_{11} deutlich.

Wie bei den Eichkopplungen hat man entweder keine attraktive Zwischenfixpunkte (für kleines m_t), oder deutlicher ausgeprägte repulsive Zwischenfixpunkte (für m_t nahe an der Trivialitätsgrenze).

Anschließend soll noch auf Strukturfragen für $N = 3$ eingegangen werden. Innerhalb der Kopplungen g_f fällt keine besondere Struktur ins Auge, da die freien Parameter t_E und $g_t(0)$ relativ starke Variationen erlauben. Jedoch erlauben die gefundenen Lösungen auf einfache Weise die Beantwortung von zu prüfenden Strukturfragen. Interessanter könnte eine Struktursuche in der Kobayashi-Maskawa-Matrix sein. Da die Entwicklung der Mischungswinkel in (IV.58–IV.61) ziemlich einfach ist, kann man diese Fragestellung systematisch diskutieren. U_{KM} wird dazu wie in der Ableitung des Ergebnisses nach kleinen Größen entwickelt ($+O(3)$):

$$U_{KM} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\theta_1^2}{2} & -\theta_1 & -\theta_1\theta_3 \\ \theta_1 & 1 - \frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\theta_2^2}{2} - \frac{\theta_3^2}{2} - \theta_2\theta_3 e^{i\delta} & \theta_3 + \theta_2 e^{i\delta} \\ \theta_1\theta_2 & \theta_2 + \theta_3 e^{i\delta} & \theta_2\theta_3 - (1 - \frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\theta_3^2}{2}) e^{i\delta} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.67})$$

Dann werden die Lösungen (IV.58–IV.61) eingesetzt.

$$U'_{KM} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\theta_1^2}{2} & -\theta_1 & -\theta_1\theta_3\sqrt{\beta} \\ \theta_1 & 1 - \frac{\theta_1^2}{2} - (\frac{\theta_2^2}{2} - \frac{\theta_3^2}{2} - \theta_2\theta_3e^{i\delta})\beta & (\theta_3 + \theta_2e^{i\delta})\sqrt{\beta} \\ \theta_1\theta_2\sqrt{\beta} & (\theta_2 + \theta_3e^{i\delta})\sqrt{\beta} & \theta_2\theta_3\beta - (1 - \frac{\theta_2^2}{2}\beta - \frac{\theta_3^2}{2}\beta)e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (IV.68)$$

Man beachte, daß dieses Ergebnis numerisch nicht von der Parametrisierung der Kobayashi-Maskawa-Matrix abhängt. Die Systematik der Evolution der Kobayashi-Maskawa-Matrix kann jetzt abgelesen werden. Es ist auch sehr leicht, die Ergebnisse numerischer Simulationen wie in [80] zu verstehen. Darüber hinaus können Fragen nach gewissen Lösungsstrukturen sofort beantwortet werden.

Sollte ein Einbettungstyp eine ganz gewisse Struktur in der Kobayashi-Maskawa-Matrix erfordern, dann kann mit den Daten aus Anhang B mit Hilfe einer Variation von β (≥ 1) beantwortet werden, ob es möglich ist, diese Struktur zu erreichen. Hierbei wird die Überlegenheit der analytischen Lösungen über numerische Simulationen sehr deutlich.

Beispielsweise könnte man eine Universalität in der Kobayashi-Maskawa-Matrix wollen. Damit ist die Unabhängigkeit der Mischungen von den Generationen gemeint. Das heißt, alle Diagonalelemente sollen betragsmäßig identisch werden. Weiterhin sollen die Elemente jeder Nebendiagonale betragsmäßig gleich sein. Dies führt zu den folgenden vier Bedingungen:

$$1 - \frac{\theta_1^2}{2} = \left| 1 - \frac{\theta_1^2}{2} - (\frac{\theta_2^2}{2} + \frac{\theta_3^2}{2} + \theta_2\theta_3e^{i\delta})\beta \right| \quad (IV.69)$$

$$1 - \frac{\theta_1^2}{2} = \left| \theta_2\theta_3\beta - (1 - \frac{\theta_2^2}{2}\beta - \frac{\theta_3^2}{2}\beta)e^{i\delta} \right| \quad (IV.70)$$

$$\theta_1 = \sqrt{\beta}|\theta_2 + \theta_3e^{i\delta}| \quad (IV.71)$$

$$\theta_1 = \sqrt{\beta}|\theta_3 + \theta_2e^{i\delta}|. \quad (IV.72)$$

Die einzige Lösung ist

$$\theta_1 = 0 + \mathcal{O}(3) \quad (IV.73)$$

$$\theta_2 = \theta_3 + \mathcal{O}(3) \quad (IV.74)$$

$$\delta = \pi + \mathcal{O}(3) . \quad (IV.75)$$

Diese Lösung ist phänomenologisch uninteressant (da $\theta_1^{exp} \neq 0$) und außerdem β -unabhängig. Das heißt, selbst dann, wenn obige Lösungen phänomenologisch akzeptabel wären, würde keinerlei t-Massenabhängigkeit auftreten. Damit ist die Evolution zu einer universellen Kobayashi-Maskawa-Matrix für drei Generationen, beliebige t-Masse und Einbettungsskala ausgeschlossen.

Dies zeigt die Überlegenheit der analytischen Lösungen über entsprechende numerische Simulationen der Evolution. Das Absuchen des Raumes der freien Parameter ist sehr rechenzeitaufwendig, und bei mehreren freien Parametern praktisch unmöglich. Sollen d Parameter abgesucht und für jeden Parameter n Werte überprüft werden, so ist n^d -mal die Einzelüberprüfung durchzuführen. Wie obiges Beispiel zeigt, ist die entsprechende Fragestellung mit den Lösungen dagegen sehr schnell und allgemein zu beantworten.

Nun soll die Evolution der Yukawa-Kopplungen für beliebiges N untersucht werden. Da dies allgemein nicht möglich ist, geht man in Schritten vor. In einer ersten Approximation werden entartete schwere Multipletts angenommen. Wie früher kann man dann mit Diagonalmatrizen arbeiten, wodurch das Problem wesentlich einfacher wird. Die Entartung der Multipletts führt nämlich zu $S_Y = 0$. Daraus resultiert

$$-16\pi^2 \frac{dM_Y(t)}{dt} = [G_Y(t) \mathbf{1} - T(t) \mathbf{1}] M_Y(t) . \quad (IV.76)$$

Da

$$\begin{aligned} -16\pi^2 \frac{d(M_Y(t) M_Y^+(t))}{dt} = \\ \left(-16\pi^2 \frac{dM_Y(t)}{dt} \right) M_Y^+(t) + M_Y(t) \left(-16\pi^2 \frac{dM_Y^+(t)}{dt} \right) \end{aligned} \quad (IV.77)$$

und

$$T = \text{Spur}(3M_U M_U^\dagger + 3M_D M_D^\dagger + M_N M_N^\dagger + M_E M_E^\dagger) \quad (\text{IV.78})$$

folgt unter Vernachlässigung der Eichterme G_Y für großes T :

$$-16\pi^2 \frac{dT}{dt} = -T^2 . \quad (\text{IV.79})$$

Durch Vergleich mit (IV.27) findet man, daß hier $3g_t^2$ durch T ersetzt wird. Also kann m_t an der Ordinate der Abbildung IV.3 in guter Näherung durch

$$\sqrt{\frac{T}{3}} = \sqrt{g_t^2 + g_T^2 + g_{T'}^2 + \dots + g_b^2 + g_B^2 + \dots + \frac{g_{\nu_i}^2}{3} + \dots + \frac{g_{e_i}^2}{3}} \quad (\text{IV.80})$$

ersetzt werden, wobei $g_{f_i}^2$ je ein schweres Fermion repräsentiert. In β (Gl. (IV.29)) ist dann g_t^2 auch durch $\sqrt{\frac{T}{3}}$ zu ersetzen. Die Eigenwerte werden sofort gefunden, und für die verallgemeinerten Mischungswinkel ergibt sich keine Evolution ($S_Y = 0$).

Als nächster Spezialfall sollen alle schweren Fermionen gleich schwer angenommen werden; die Multipletts sollen aber nicht unbedingt entartet sein. Diese Situation wird sich als durchaus realistisch erweisen, da die Lücke zwischen experimenteller Untergrenze und abnehmender Trivialitäts-Obergrenze mit wachsendem N sehr schnell klein wird. Dadurch ist diese Approximation eine gute Näherung. Für beliebiges N sollen die obersten n_u up-Quarks, n_D down-Quarks, n_N Neutrinos und n_E Elektron-artige Leptonen gleich schwer sein. Dann ist

$$T = \Sigma_n g^2$$

$$\Sigma_n = [3(n_U + n_D) + (n_N + n_E)] . \quad (\text{IV.81})$$

Wie vorher wird unter Vernachlässigung der Mischung die Evolution der Eigenwerte betrachtet.

Für große Massen vereinfacht sich Gl. (IV.27) unter Vernachlässigung von G_Y zu

$$-16\pi^2 \frac{dg_t}{dt} \simeq -\frac{9}{2} g_t^3 . \quad (IV.82)$$

In der obigen Approximation wird der die Landau-Singularität bestimmende Faktor $\frac{9}{2}$ modifiziert, und die entarteten Yukawa-Kopplungen g genügen dann folgender Differentialgleichung (für große Massen):

$$-16\pi^2 \frac{dg}{dt} \simeq -(\Sigma_n + T_s) g^3 . \quad (IV.83)$$

$$T_s = \begin{cases} 0 & \text{für ein entartetes Multipllett} \\ \frac{3}{2} & \text{für ein schweres Quark im Multipllett} \\ -\frac{3}{2} & \text{für ein schweres komplimentäres Quark} \\ \frac{1}{2} & \text{für ein schweres Lepton im Multipllett} \\ -\frac{1}{2} & \text{für ein schweres komplimentäres Lepton} \end{cases}$$

Abb. IV.3 ist dann zu reskalieren. Für die t-Masse m_t muß

$$m \sqrt{\frac{2}{9} (\Sigma_n + T_s)} = m \sqrt{\frac{2}{9} [3(n_U + n_D) + (n_N + n_E) + T_s]} \quad (IV.84)$$

an die Ordinate geschrieben werden. Gl. (IV.82) führt zu

$$m_t^2 \leq v^2 \frac{16\pi^2}{g t} . \quad (IV.85)$$

Die obige Approximation bedeutet, daß hieraus

$$m^2 \leq v^2 \frac{16\pi^2}{g t} \frac{1}{\frac{2}{9} (\Sigma_n + T_s)} \quad (IV.86)$$

wird. Die Massenbeschränkung wird somit durch den Faktor

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{9} (\Sigma_n + T_s)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{9} [3(n_U + n_D) + (n_N + n_E) + T_s]}} \quad (IV.87)$$

umskaliert.

In Abb. IV.3 war für $\Lambda = 10^{15} \text{ GeV}$ $m_t \leq 227.5 \text{ GeV}$. Falls zum Beispiel eine vierte Generation mit einem schweren Quark-Dublett existiert, müssen die Massen kleiner sein:

$$m \leq 227.5 \text{ GeV} \frac{1}{\sqrt{\frac{21}{9}}} \simeq 149 \text{ GeV} . \quad (IV.88)$$

Noch mehr Generationen lassen diesen Wert noch kleiner werden. Für den bei den Eichkopplungen speziellen Fall $N = 10$ findet man bei $\Lambda = 10^{15} \text{ GeV}$, wenn alle weiteren Generationen und das t-Quark schwer sind $m \leq 62 - 66 \text{ GeV}$, je nachdem, ob man massive Neutrinos annimmt oder nicht. Dieser Fall könnte bald experimentell ausgeschlossen werden. Das Spektrum für große N müßte dann durch sehr nahe beieinanderliegende Generationen gekennzeichnet sein. Genau diese Art von Spektrum entsteht später bei der Analyse der wahrscheinlichsten Parameter.

Durch die experimentelle Untergrenze für schwere Fermionen m_{min} kann man die Zahl der schweren Generationen als Funktion von $t = \ln(\frac{\Lambda}{M_Z})$ begrenzen, wenn man die Trivialitätsgrenzen einhalten will.

$$\begin{aligned} \frac{2}{9}(\Sigma_n + T_s) &= \frac{2}{9}[3(n_U + n_D) + (n_N + n_E) + T_s] \\ &\leq \left(\frac{227.5 \text{ GeV}}{m_{min}} \right)^2 \frac{\ln(\frac{10^{15}}{92})}{t} \end{aligned} \quad (IV.89)$$

Da die linke Seite dieser Ungleichung ≥ 1 ist, kann t als Funktion von m_{min} beschränkt werden:

$$t \leq \left(\frac{227.5 \text{ GeV}}{m_{min}} \right)^2 \ln \left(\frac{10^{15}}{92} \right) . \quad (IV.90)$$

Falls einmal mehrere schwere Generationen bekannt sein sollten, ist die linke Seite von Ungleichung (IV.89) durch einen entsprechenden Minimalwert zu ersetzen. Die Beschränkungen für t wären dann restriktiver.

Die Abbildungsdichtematrix für N Generationen soll hier nicht detailliert aufgeführt werden. Wie für drei Generationen ist deren Eigenschaft auch durch Produkte der Form $\alpha_Y \beta^\nu$ gegeben, wobei β^ν nun ein komplizierteres Produkt der Form

$$\beta \cdot \prod_{i=1}^n \beta_{f_i}^{\nu_i}$$

ist.

$$\beta = \exp\left(-\frac{1}{16\pi^2} \int_0^t T(\tau) d\tau\right)$$

beinhaltet die universellen Masseneffekte. $\beta_{f_i}^{\nu_i}$ stellen relative Faktoren dar, die nur Funktionen der Massenquadrataufspaltung im jeweiligen Multipllett sind. Die Potenzen ν_i können auch negativ sein. Das Zusammenspiel von α_Y (< 1), β (> 1) und $\beta_{f_i}^{\nu_i}$ ergibt dann vielfältige Möglichkeiten, so daß keine besondere Struktur auffällt.

Eine spezielle Eigenschaft soll aber noch erwähnt werden, da sie weitreichende Konsequenzen hätte. Bisher wird die Zugehörigkeit eines Fermions zu einer Generation durch die Massen definiert. Die Lösungen der Renormierungsgruppengleichungen erlauben es prinzipiell, daß Eigenwerte durch die Evolution ihre Ordnung ändern. Dies soll an folgendem Beispiel gezeigt werden.

Es gebe drei schwere Quarks a,b,c mit der Quark-Multipllettstruktur:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} .$$

Die Quarks b und c seien entartet, also $m_b = m_c$ und a sei schwer, aber leichter als b,c: $m_a < m_b$. Wenn nur die schweren Quarks in T und S beitragen, erhält man folgende Differentialgleichungen für die zugehörigen Yukawa-Kopplungen

$$-16\pi^2 \frac{dg_a}{dt} = (G_U - \frac{9}{2}g_a^2 - 6g_b^2)g_a \quad (IV.91)$$

$$-16\pi^2 \frac{dg_b}{dt} = (G_U - 3g_a^2 - 6g_b^2)g_b . \quad (IV.92)$$

Da in Gl. (IV.91) der Koeffizient von g_a^2 größer ist als in Gl. (IV.92), wächst g_a schneller als g_b . Gegebenenfalls kann g_a absolut größer als g_b werden, obwohl die Anfangswerte genau andersherum geordnet sind. Die Bedeutung solcher

Lösungen ist darin zu sehen, daß die bisher die Ordnung der Generationen definierenden Massenwerte ihre Reihenfolge ändern. Obiges Beispiel besagt, daß diese Ordnung durch Renormierungseffekte durcheinander gebracht werden kann. Allerdings kann dies nur für eine große absolute Massenaufspaltung in einem Multiplett im Zusammenspiel mit noch schwereren Quarks geschehen; alle bisher bekannten Quarks können so nicht vermischt werden. Doch könnte die 3. Generation eine relativ große Aufspaltung haben, während weitere, noch schwerere Generationen degeneriert sind. Das wäre genau die oben skizzierte Situation, und für große N ist das eine durchaus realistische Möglichkeit.

IV.3 Higgs-Kopplungen

Die Renormierungsgruppengleichung für die Higgs-Kopplung aus Anhang C ,Gl. (IX.11-13), ist:

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \beta_\lambda = c_\lambda \left(\lambda^2 - \left[\frac{1}{4}g_1^2 + \frac{3}{4}g_2^2 - \frac{T}{3} \right] \lambda + \frac{1}{16}g_1^4 + \frac{1}{8}g_1^2g_2^2 + \frac{3}{16}g_2^4 - \frac{H}{3} \right) \quad (IV.93)$$

$$c_\lambda = \frac{6}{8\pi^2} \quad (IV.94)$$

$$T = \text{Spur}(3M_U M_U^+ + 3M_D M_D^+ + M_N M_N^+ + M_E M_E^+) \quad (IV.95)$$

$$H = \text{Spur}(3 (M_U M_U^+)^2 + 3 (M_D M_D^+)^2 + (M_N M_N^+)^2 + (M_E M_E^+)^2) \quad (IV.96)$$

Die Struktur der Gl. (IV.93) erinnert sehr stark an das Beispiel der $O(N)$ -Theorie in Kapitel III. Ohne zusätzliche Kopplungen würde der skalare Sektor des Standardmodells wegen seiner Ähnlichkeit zu einer ϕ^4 -Theorie vermutlich trivial sein [89, 61], da die β -Funktion dann proportional zu λ^2 wäre (mit positiven Koeffizienten). Analog zu Gl. (III.5) hätte die Kopplung dann einen Pol bei

$$t_{Pol} = \frac{1}{c_\lambda \lambda(0)} . \quad (IV.97)$$

Dieser könnte, wie im Beispiel von Kapitel III, durch Einbettung und zusätzliche Kopplungen bedeutungslos bzw. ganz vermieden werden [89, 61].

Nun sind im Standardmodell von Anfang an zusätzliche Kopplungen vorhanden, welche die erlaubten Skalenbereiche sowieso einschränken. Das sind die Grenzen in Abb. IV.1 von den Eichkopplungen und die Beschränkung von den Yukawa-Kopplungen. Da also immer Einschränkungen für den Skalenbereich vorliegen, ist formal ein endliches Intervall von erlaubten Kopplungen zu erwarten. Unklar ist das Zusammenspiel von Einbettung und zusätzlichen Eich- und Yukawa-Kopplungen.

Um das zu verstehen, untersucht man zuerst den Fall $N = 3$. Wie bei den Yukawa-Kopplungen wird in T und H nur der Einfluß des t -Quarks mitgenommen. Die β -Funktion vereinfacht sich dadurch zu

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \beta_\lambda = c_\lambda \left(\lambda^2 - \left[\frac{1}{4}g_1^2 + \frac{3}{4}g_2^2 - g_t^2 \right] \lambda + \frac{1}{16}g_1^4 + \frac{1}{8}g_1^2g_2^2 + \frac{3}{16}g_2^4 - g_t^4 \right) \quad (IV.98)$$

Um zu verstehen wie $\lambda(t)$ eingeschränkt wird, kann man folgendermaßen vorgehen. Bei genauerem Betrachten stellt sich heraus, daß die Eichterme in Gl. (IV.98) die β -Funktion noch positiver machen. Insbesondere erzeugen sie keine Nullstellen der β -Funktion. Durch große Werte von g_t kommt aber das gewünschte Verhalten zustande. Um das Ergebnis zu verstehen, werden die Eichterme g_i^2 nun vernachlässigt.

$$\frac{d\lambda}{dt} \simeq c_\lambda (\lambda^2 + g_t^2 \lambda - g_t^4) \quad (IV.99)$$

Die Lösung hat einen Pol, und deswegen müssen die Anfangswerte eingeschränkt werden:

$$\lambda \leq -\frac{g_t^2}{2} + \frac{\sqrt{5} g_t^2}{2} \frac{1 + \exp(-\sqrt{5} c_\lambda t)}{1 - \exp(-\sqrt{5} c_\lambda t)}. \quad (IV.100)$$

Für kleines g_t entwickelt man und findet

$$\lambda \leq \frac{1}{c_\lambda t} - g_t^2 \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right). \quad (IV.101)$$

Für großes g_t ergibt sich andererseits

$$\lambda \leq g_t^2 \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right). \quad (IV.102)$$

Über die Relation $\lambda = \frac{m_H^2}{2v^2}$ findet man Grenzen für die Higgs-Masse. In Gl. (IV.101) ist der erste Term die Massenbeschränkung von der Einbettung bei der Skala t . Mit wachsendem g_t^2 wird diese um einen nur von der t -Masse abhängenden Wert vermindert. Für große g_t^2 liefert Gl. (IV.102) eine skalenunabhängige Grenze, die für wachsende t -Masse ansteigt. Genau dieses Verhalten findet man in der exakten Lösung.

Eine numerische Analyse des vollen Problems (IV.98) für $g_t = 0$ ergibt Abb. IV.5 [89,91,61]. Kurve 1 in Abb. IV.5 ist das Analogon zu der Obergrenze an λ im Beispiel der $O(N)$ -Theorie (siehe Gl. (III.7)). Aus dem ersten Term in Gl. (IV.101) folgt eine Lösung der Form

$$\lambda_{max} \simeq \frac{1}{\ln\left(\frac{q_{max}}{q_0}\right)}. \quad (IV.103)$$

Die Einbettungsskala darf wegen der $U(1)$ -Landau-Singularität bei 10^{42} GeV nicht beliebig groß werden. Kurve 1 in Abb. IV.5 strebt dann gegen einen konstanten, endlichen Wert (ca. 125 GeV für m_H).

In einem weiteren Schritt wird nun zusätzlich die t -Massenabhängigkeit untersucht [89,91,92]. Eine entsprechende numerische Analyse der Gl. (IV.98) führt zu Abb. IV.6. Die horizontalen Kurven sind die Obergrenzen an die Higgs-Masse für die dazugeschriebene Einbettungsskala. Diese Linien wurden durch die Gln. (IV.101) und (IV.102) bereits verstanden. Die nach rechts begrenzenden, durchgezogenen Linien stammen aus der Forderung, daß $\lambda(t)$ zwischen $t = 0$ und der Einbettungsskala nicht negativ wird. Die Forderung $\lambda(t) \geq 0$ ist physikalisch durch die Existenz eines Minimums im Higgs-Potential V_H zu begründen (Grundzustand). Diese Grenzen für m_t sind niedriger, als die aus der möglichen Trivialität der Yukawa-Kopplungen (siehe Abb. IV.3), und deshalb sind in Abb. IV.6 diese Trivialitätsgrenzen nur gestrichelt angedeutet.

Für beliebiges N ist der Einfluß weiterer Generationen auf die Trivialitätsgrenzen über T und H in Gl. (IV.93) gegeben. Wie für die Yukawa-Kopplungen, soll dieser

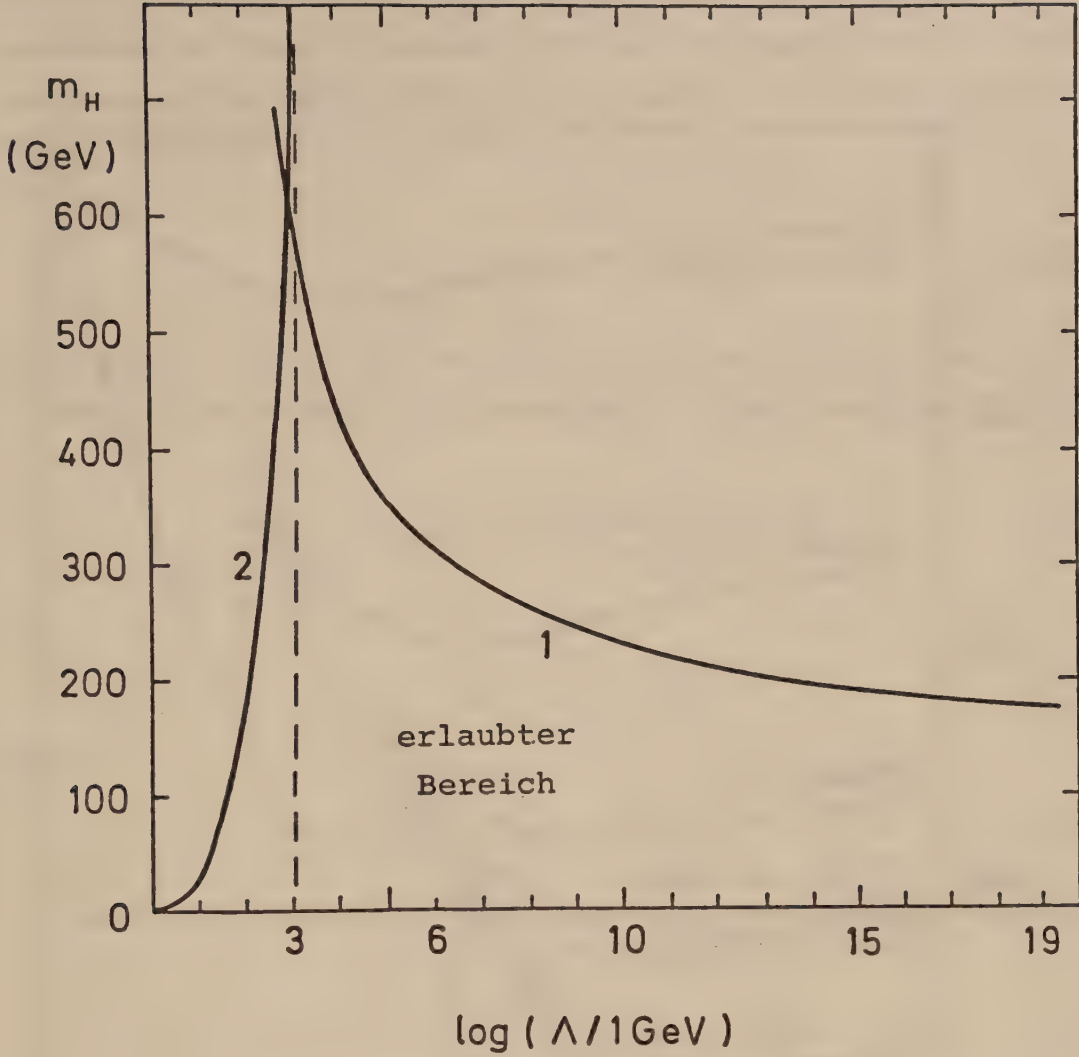


Abb. IV.5: Trivialitätsgrenze für m_H bei $N = 3$ und $m_t = 0$ als Funktion der Einbettungsskala Λ (Linie 1). Die Higgs-Masse m_H ist bei M_Z normiert. Zur Umrechnung in physikalische Massen ist Anhang E zu verwenden.

Fall für eine beliebige Zahl entarteter Fermionen untersucht werden. Wie oben ist n_U, n_D, n_N, n_E die Anzahl der entarteten Teilchen für jede Spezies. Dann ist

$$T = [3(n_U + n_D) + (n_N + n_E)]g^2 = \Sigma_n g^2 \quad (\text{IV.104})$$

und

$$H = (3(n_U^2 + n_D^2) + (n_N^2 + n_E^2))g^4 = \Sigma_{n^2} g^4 . \quad (\text{IV.105})$$

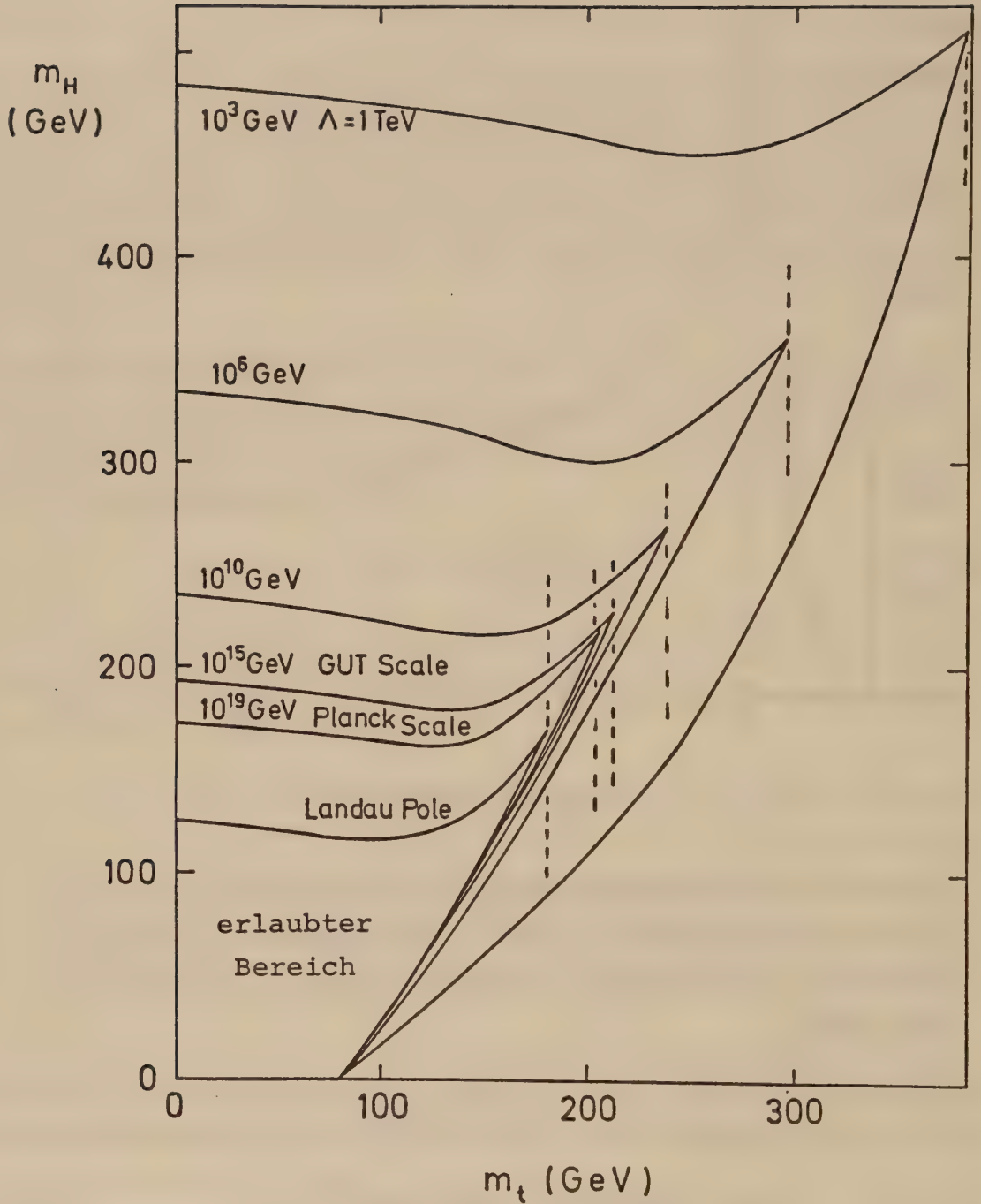


Abb. IV.6: Trivialitätsgrenze für die Higgs-Masse bei $N = 3$ als Funktion der t -Masse für verschiedene Einbettungsskalen Λ . Die horizontalen Linien sind Trivialitätsgrenzen. Die gestrichelten vertikalen Linien zeigen die Trivialitätsgrenze für m_t bei dem zugehörigen Λ . Die durchgezogenen schräg verlaufenden Linien folgen aus $\lambda(t) \geq 0$ für t im physikalischen Bereich. Erlaubte Parameter sind jeweils die von den Kurven eingerahmten Ecken um den Ursprung.

Da die Trivialitätsgrenzen in Abb. IV.5 grob durch den für große Higgs-Massen dominierenden Term $c_\lambda \lambda^2$ bestimmt werden, sollen auch für große N die Eichkopplungen vernachlässigt werden, um ein qualitatives Ergebnis zu bekommen. Damit ergibt sich

$$\frac{d\lambda}{dt} = c_\lambda \left(\lambda^2 + \frac{T}{3} \lambda - \frac{H}{3} \right), \quad (IV.106)$$

mit T aus Gl. (IV.95) und H aus Gl. (IV.96). Nimmt man grob an, daß T und H konstant sind, so folgt durch Vermeidung der Polstelle analog zu Gl. (IV.100)

$$\lambda \leq \lambda_M + d\lambda \frac{1 + \exp(-2c_\lambda d\lambda t)}{1 - \exp(-2c_\lambda d\lambda t)}, \quad (IV.107)$$

mit

$$\lambda_M = -\frac{T}{6} = -\frac{\Sigma_n}{6} g^2 \quad (IV.108)$$

und

$$d\lambda = \sqrt{\left(\frac{T}{6}\right)^2 + \frac{H}{3}} = g^2 \sqrt{\left(\frac{\Sigma_n}{6}\right)^2 + \frac{\Sigma_{n^2}}{3}}. \quad (IV.109)$$

Für kleine Fermionmassen in T und H entwickelt man für kleines $d\lambda$ und findet:

$$\lambda \leq \frac{1}{c_\lambda t} - d\lambda + \lambda_M = \frac{1}{c_\lambda t} - g^2 \left(\sqrt{\left(\frac{\Sigma_n}{6}\right)^2 + \frac{\Sigma_{n^2}}{3}} - \frac{\Sigma_n}{6} \right). \quad (IV.110)$$

Für große Fermionmassen liefert eine entsprechende Entwicklung

$$\lambda \leq \lambda_M + d\lambda = g^2 \left(\sqrt{\left(\frac{\Sigma_n}{6}\right)^2 + \frac{\Sigma_{n^2}}{3}} - \frac{\Sigma_n}{6} \right). \quad (IV.111)$$

Das Ergebnis Gl. (IV.107) kann dazu verwendet werden, Abb. IV.6 für beliebiges N umzuskalieren. Während die Ordinate weiterhin mit m_H bezeichnet wird, nimmt man eine Massenverschiebung an der Abszisse vor. Diese Verschiebung errechnet sich aus Gl. (IV.107), indem man für beliebige n_Y nach dem selben numerischen Wert wie für $n_U = 1$, $n_D = n_N = n_E = 0$ fragt. Damit werden die Trivialitätsgrenzen umskaliert.

Die beiden anderen Grenzen in Abb. IV.6 können auch umskaliert werden. Für die horizontalen Linien aus der Trivialitätsgrenze für Yukawa-Kopplungen muß nun das Ergebnis aus Gl. (IV.84) verwendet werden, das mit Hilfe der selben Approximationen gewonnen wurde. Man beachte, daß hier eine andere Umskalierung vorliegt, und somit die relative Lage dieser Kurven zu den Higgs-Trivialitätsgrenzen verändert wird.

Die dritte Art von Kurve aus der Forderung $\lambda(t) > 0$ in Abb. IV.6 muß ebenfalls umskaliert werden. Die Bedingung $\lambda(t) \geq 0$ für $t \leq t_E$ ist für alle gezeichneten Kurven äquivalent zu $\lambda(t_E) = 0$. Für diese Bedingung werden die Eichkopplungen wichtig. Dafür kann aber λ für kleine Higgs-Massen vernachlässigt werden. Speziell für $\lambda = 0$ muß $\frac{d\lambda}{dt} \geq 0$ bei $t = 0$ gelten, da sonst λ sofort negativ wird. Diese Bedingung fixiert das untere Ende dieser Linien bei $\lambda = 0$. Ein Umskalierungsgesetz ergibt sich somit aus der β -Funktion für $\lambda = 0$:

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = c_\lambda \left(\frac{1}{16}g_1^4 + \frac{1}{8}g_1^2g_2^2 + \frac{3}{16}g_2^4 - \frac{H}{3} \right) \quad (IV.112)$$

H wird so durch die Anfangswerte der Eichkopplungen fixiert und ist selbst eine Funktion der Yukawa-Kopplungen. Also folgt

$$g^4 = \frac{\left(\frac{1}{16}g_1^4 + \frac{1}{8}g_1^2g_2^2 + \frac{3}{16}g_2^4 \right)}{\Sigma_{n^2}},$$

wodurch eine Umskalierung von g^4 gegeben ist. Umgeschrieben in Massen muß für die rechte, durchgezogene Linie in Abb. IV.6 nun anstelle von m_t

$$m \cdot \left(\frac{\Sigma_{n^2}}{3} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (IV.113)$$

an die Abszisse geschrieben werden.

Als Gesamtergebnis hat man für beliebiges N ähnliche Grenzen an Higgs- und Fermionmassen wie im Fall $N = 3$. Für Abb. IV.6 werden die drei Kurventypen unterschiedlich reskaliert. Dadurch kann gegebenenfalls die Grenze für Yukawa-Kopplungen, anders als in Abb. IV.6, eine stärkere Beschränkung für die Fermionmassen liefern als $\lambda \geq 0$.

Abschließend soll noch kurz auf die Abbildungsdichte und Struktur für Higgs-Kopplungen eingegangen werden.

Die numerische Analyse liefert wie vorher bei den Yukawa-Kopplungen eine extreme Sensitivität gegenüber Anfangswerten nahe an den Trivialitätsgrenzen. So kann man dann einen repulsiven Zwischenfixpunkt realisieren. Für alle anderen Werte ist die Abbildungsdichte nicht stark ausgeprägt. Die Strukturfrage für die Higgs-Kopplung beschränkt sich auf die Annahme eines vorgegebenen Wertes. Innerhalb der Grenzen ist jeder beliebige, positive Wert möglich, und damit ist ohne Aussagen über die Art der Einbettung die Fragestellung nicht zu beantworten.

IV.4 Die wahrscheinlichsten Higgs- und t-Massen

Die in Kapitel III illustrierten Parameterwahrscheinlichkeiten sollen hier für das Standardmodell untersucht werden. Die Grundidee war, die Wahrscheinlichkeit von Parametern bei niedrigen Energien zu berechnen, indem man für die Parameter bei einer gedachten Einbettungsskala mit einer Gleichverteilung beginnt. Diese Gleichverteilung drückt die maximale Unkenntnis über die Modellparameter bei der Einbettungsskala aus. Für $N = 3$ waren alle Parameter außer m_H und m_t fixiert. Die numerischen Analysen ergaben einen repulsiven Zwischenfixpunkt für diese Parameter nahe der Trivialitätsgrenze. Um die Parameterwahrscheinlichkeit auszurechnen, werden die Parameter bei der Einbettungsskala auf Werte beschränkt, so daß die störungstheoretischen β -Funktionen verwendet werden können:

$$0 \leq m_t(t) \leq 2 \text{ TeV}$$

$$0 \leq m_H(t) \leq 1 \text{ TeV}$$

Die Integration einer Gleichverteilung zu $t = 0$ würde in den Abbildungen IV.3 und IV.5 für eine gegebene Einbettungsskala einen Hügel an der jeweiligen Trivialitätsgrenze ergeben. Das heißt, daß die Werte nahe der Trivialitätsgrenze bevorzugte Parameter sind. Für die volle Analyse ist eine zweidimensionale Gleichverteilung zu integrieren. Dies kann approximativ als Produkt der Einzelverteilungen verstanden werden. In Abb. IV.6 ist somit die jeweilige Ecke unterhalb

der Schnittpunkte der Trivialitätsgrenzen für m_H und m_t der bevorzugte Parameterbereich. Interessanterweise ist diese Ecke für $N = 3$ durch die Positivität von $\lambda_{(t)}$ weiter eingeengt. Die wahrscheinlichsten Higgs- und t-Massen als Funktion der Einbettungsskala t sind dann die Zentren der äußersten Ecken der jeweiligen Trivialitätsgrenze in Abb. IV.6. Für eine Einbettungsskala von $\Lambda = 10^{15} \text{ GeV}$ sind dies: $m_H \simeq 180 \text{ GeV}$, $m_t \simeq 200 \text{ GeV}$. Untersucht man den Eichsektor für $N = 3$ im nachhinein auf wahrscheinlichste Parameter, findet man keinerlei stark bevorzugte Werte. Anders ist die Situation wenn N frei wählbar ist. Für $N \simeq 10$ fanden wir ebenfalls einen bemerkenswerten repulsiven Zwischenfixpunkt für alle drei Eichkopplungen simultan bei $\Lambda = 10^{15} \text{ GeV}$. Die experimentell bekannten Werte für die Eichkopplungen sind dann die wahrscheinlichsten Parameter, wenn $\Lambda = 10^{15} \text{ GeV}$ und $N \simeq 10$ gesetzt wird.

In diesem Fall ist aber auch die Analyse für die wahrscheinlichsten Higgs- und Fermionmassen zu wiederholen. Mit der bekannten Approximation von je n_Y entarteten Fermionen können die früher in diesem Kapitel abgeleiteten Reskalierungsgesetze verwendet werden, um die wahrscheinlichsten Massen zu berechnen.

Aus Kapitel IV.2 (Gl. (IV.86)) folgt für die Fermionmassen m_F

$$m_F \simeq \frac{m_F^0(\Lambda)}{\sqrt{\frac{2}{9}(\Sigma_n + T_s)}} . \quad (\text{IV.114})$$

Hierbei ist $m_F^0(\Lambda)$ die wahrscheinlichste t-Masse für $N = 3$ aus Abb. IV.3 als Funktion von Λ . Die wahrscheinlichste t-Masse war die Trivialitätsgrenze in Abb. IV.3. Man beachte, daß m_F mit wachsenden n_Y kleiner wird, und so die gemachte Approximation immer besser den Möglichkeiten der Parameterwahl für die einzelnen Massen entspricht.

Die Higgs-Masse wird für große Fermionmassen in derselben Näherung in Kapitel IV.3 durch $\lambda_M + d\lambda$ (Gl. (IV.111)) gegeben. Für die Higgs-Masse heißt dies

$$m_H^2 \simeq 2m_F^2 \left(\sqrt{\left(\frac{\Sigma_n}{6}\right)^2 + \frac{\Sigma_n^2}{3}} - \frac{\Sigma_n}{6} \right) . \quad (\text{IV.115})$$

Für den Fall $N = 10$, $\lambda = 10^{15} \text{ GeV}$, bei dem die gegebenen Eichkopplungen die

wahrscheinlichsten Parameter sind, kann man probeweise ein schweres t-Quark und alle Teilchen der vierten bis zehnten Generation als schwer annehmen.

Das heißt: $n_U = 8$, $n_D = n_E = n_N = 7$.

Dann ist

$$m_F \simeq \frac{m_F^0(\Lambda)}{\sqrt{\frac{123}{9}}} \simeq 0.27 \cdot m_F^0(\Lambda) . \quad (IV.116)$$

Für $\Lambda = 10^{15} \text{ GeV}$ ist $m_F^0(\Lambda) \simeq 200 \text{ GeV}$, woraus $m_F \simeq 54 \text{ GeV}$ für die entarteten Massen bei $N = 10$ folgt. Daraus errechnet sich die wahrscheinlichste Higgs-Masse zu $m_H \simeq 186 \text{ GeV}$. Generell ist die wahrscheinlichste Higgs-Masse relativ unsensitiv gegenüber Variationen von n_Y , da die Faktoren von m_F und m_H sich fast auslöschen.

Die Lücke zwischen der experimentellen Untergrenze ($m_t > 50 \text{ GeV}$) für Fermionmassen und der theoretischen Trivialitäts-Obergrenze wird mit besseren Experimenten bei höheren Energien und größerem N immer kleiner. Sollten also weitere Generationen existieren, kann das bisher beobachtete grobe exponentielle Anwachsen der Massen von Generation zu Generation nicht auftreten. Da diese Lücke mit wachsendem N schnell sehr klein wird, haben wir oben den Fall beliebiger Generationenzahl für schwere, entartete Fermionen untersucht. Sollte es wirklich mehr als eine schwere Generation geben, dann ergibt sich für die Zukunft eine sehr schöne Möglichkeit einen Hinweis auf die Einbettungsskala zu bekommen.

Findet man irgendwann weitere, eng beieinander liegende schwere Generationen, so kann man erwarten, daß dies ein Anzeichen des repulsiven Zwischenfixpunkts ist. Anders ausgedrückt wird ein Spektrum mit einer Gleichverteilung bei der Einbettungsskala mehrere Zustände in das Maximum der wahrscheinlichsten Parameter bei niedrigen Energien abbilden. Da Σ_n durch Abzählen bekannt ist, kann Gl. (IV.114) verwendet werden, um $m_f^0(\Lambda)$ zu berechnen. Aus Abbildung IV.3 läßt sich die dafür notwendige Einbettungsskala ablesen. Da die entsprechenden Fermionmassen bald meßbar sind, könnte dies schon in den nächsten Jahren geschehen. Vielleicht erhält man so aus dem Spektrum der Fermionen eine zweite Skalenaussage, die möglicherweise mit der aus dem Eichsektor koinzidiert. Dies wäre dann ein extrem starkes Argument für einen Skalensprung.

IV.5 Wahrscheinlichste Mischungswinkel und Phase

Das Konzept der wahrscheinlichsten Parameter soll hier auf die Mischungswinkel angewandt werden. Die Lösungen (IV.58–IV.61) für drei Generationen werden dazu verwendet, um eine Gleichverteilung dem Renormierungsgruppenfluß zu unterwerfen. Um die Gültigkeit der verwendeten Lösungen zu gewährleisten, schränkt man sich auf $0 \leq \theta_i \leq 1/2$ und $0 \leq \delta \leq \pi$ ein. Die Evolution der Winkel wird durch β bestimmt. Da die wahrscheinlichste t-Masse nahe an der Trivialitätsgrenze liegt, ist $\beta \gg 1$. Da $\theta_1(0) = \theta_1(t)$ und $\delta(t) = \delta(0)$ gilt, gibt es keine bevorzugten Werte von θ_1 und δ . $\theta_{2,3}(0) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \theta_{2,3}(t)$ führt aber dazu, daß sehr kleine Werte von θ_2 und θ_3 bevorzugt sind. Dies entspricht sehr schön den experimentellen Gegebenheiten.

Für N Generationen sind die Mischungswinkel einer entsprechend vergrößerten Kobayashi-Maskawa-Matrix (siehe Anhang A, Gl. (VII.34)) noch nicht gelöst. Die wahrscheinlichsten Parameter sind damit nicht bekannt. Allerdings kann man generell erwarten, daß entartete Multipletts zu keinen bevorzugten Mischungsparametern führen (siehe Kapitel IV.3). Dies kommt daher, daß S_Y für die Evolution der Mischungswinkel verantwortlich ist, und ein entartetes Multiplett in den entsprechenden Zeilen der Matrix keinen Beitrag liefert. Damit sind die zugehörigen Mischungsparameter konstant, und dies führt zu keinerlei bevorzugten Parameterwerten. Die Evolution von θ_i und δ wird so nur über β beeinflusst. Die wahrscheinlichsten Parameter für $\theta_{1,2,3}$ und δ sind dann wie im Fall $N = 3$ und entsprechen für beliebiges N der experimentellen Situation.

Nimmt man die mit N sich verengende Lücke zwischen experimenteller Untergrenze und Trivialitätsobergrenze hinzu, so findet man für große N einen Zwang zu entarteten Massen, und dann zu obigen Schlußfolgerungen für die Mischungswinkel. Es bleibt also vermutlich nur für mittlere N eine Möglichkeit, für weitere Mischungsparameter bevorzugte Werte zu finden.

IV.6 Zusammenfassung

In Kapitel IV wurden die in Kapitel III illustrierten Möglichkeiten zur Gewinnung von Aussagen über Modellparameter und Einbettungen auf das Standardmodell angewendet.

Für Eichkopplungen wurden die bekannten Möglichkeiten der Vereinheitlichung dargestellt. Es wurde besonders darauf hingewiesen, daß die im Standardmodell unabhängigen Eichkopplungen richtig geordnet sein müssen, und ein Zusammenhang der an sich unabhängigen Werte bestehen muß, um dies zu ermöglichen. Nur so können alle drei Kopplungen gleichzeitig bei einer Skala zusammenlaufen. Der für die $U(1)$ -Kopplungen notwendige Faktor $\frac{5}{3}$ wurde dabei als sehr allgemein bei der Identifizierung des $U(1)$ -Generators in der unterliegenden Gruppe erkannt.

Die Variation der Zahl der Generationen N ergibt die Möglichkeit einer Vereinheitlichung für alle N , wenn dies für einen Wert von N möglich ist. Der bekannte Fall $N = 3$ ist also durchaus nicht spezifisch.

Die Vereinheitlichungsskala ist nicht N -abhängig. Es wächst mit N nur der Wert der Kopplung an dieser Skala. Allerdings muß $N \leq 10$ sein, da sonst die Landau-Singularität der $SU(3)$ -Kopplung unter die Vereinheitlichungsskala kommt. Diese N -Unabhängigkeit der Vereinheitlichungsskala ist ohne den Hintergrund einer Einbettung bemerkenswert. Allerdings wird dieses Ergebnis in höheren Ordnungen unzuverlässig. Die 2-Schleifen- β -Funktionen in Anhang C würden zu einer veränderten Evolution der Eichkopplungen bei der Anwesenheit schwerer Quarks führen, wodurch die Vereinheitlichungsskala wächst. Gleichzeitig verändern sich die Anfangswerte in Anhang B, da die Gewinnung dieser Zahlen dann ebenfalls modifiziert wird. Beide Effekte korrigieren sich in erster Näherung. Wegen der extremen Sensitivität der Evolution bei großen Massen überwiegt die veränderte Evolution dann, und führt zu einer höheren Skala. Gleichzeitig bewirkt diese Sensitivität aber die Verstärkung der Fehler.

Für $N \simeq 10$ ergibt sich dadurch die Möglichkeit der nichtperturbativen Vereinheitlichung, da die Kopplungen an der Einbettungsskala dann simultan groß werden. Interessanterweise werden die bekannten experimentellen Werte der Eichkopplungen dann die wahrscheinlichsten Parameter für beliebige Einbettungen.

Die Standardvorhersagen von GUT's, wie Protonzerfall etc., werden dann modifiziert. Man hat größere Kopplungen und Einbettungsskalen mit starken Unsicherheiten, so daß der Gesamteffekt kleiner oder größer sein kann.

Für $N = 3$ wurden die effektiven Yukawa-Kopplungen in einer sehr guten Approximation gelöst. Als Ergebnis erhält man die Evolution der Massen und Mischungs-

winkel geschlossen als Funktion der Anfangswerte, einer speziellen Kombination der Mischungswinkel, der t -Masse und der Skala.

Für beliebiges N wurden die Renormierungsgruppengleichungen in der Näherung von entarteten schweren Teilchen ohne Mischung gelöst. Dies war durch die mit zunehmendem N schnell kleiner werdende Lücke zwischen experimenteller Untergrenze und theoretischer Obergrenze begründet worden.

Die Trivialitätsgrenzen für die Fermionmassen wurden als Funktion der Skala und der Zahl der schweren Fermionen abgeleitet. Als wahrscheinlichste Massenparameter ergaben sich Werte knapp unterhalb der Trivialitätsgrenze. Da die Werte und die Anzahl schwerer Fermionen unbekannt sind, kann keine Skala als bevorzugt herausgearbeitet werden. Jedoch wurde gezeigt, wie das Auftreten nahe beieinanderliegender, schwerer Generationen in der Zukunft vielleicht in eine Einbettungsskala umgesetzt werden kann.

Aufgrund der vielen freien Parameter, wurde für Strukturfragen das Werkzeug in Form der Lösungen bereitgestellt. Ohne zusätzliche Angaben über das Modell, oder die Parameter, ist eine allgemeine Analyse kaum durchführbar.

Für den Higgs-Sektor wurden die Trivialitätsgrenzen numerisch bestimmt. Approximative Lösungen wurden aus den führenden Koeffizienten der β -Funktion abgeleitet.

Für $N = 3$ wurde so Abb. IV.6 erzeugt. Die Analyse der Abbildungsdichten ergab große Anfangswertsensitivitäten für Werte nahe an den in Abb. IV.6 gezeichneten Trivialitätsgrenzen. Durch den Schnittpunkt dieser unabhängigen Grenzen läuft eine weitere Kurve aus der Forderung $\lambda(t) \geq 0$. Diese Kurve wurde aus der Existenz eines Grundzustandes abgeleitet. Die Analyse der wahrscheinlichsten Parameter ergab genau diese Ecke, in der sich die drei Kurven schneiden, als bevorzugte Werte. Somit ist für $N = 3$ und $\Lambda = 10^{15} \text{ GeV}$ die wahrscheinlichste Higgs-Masse $m_H = 180 \text{ GeV}$ und die wahrscheinlichste t -Masse $m_t = 200 \text{ GeV}$.

Für beliebiges N und eine vernachlässigbare Mischung wurden die Umskalierungsgesetze der Kurven in der bereits motivierten Approximation entarteter, schwerer Fermionen angegeben. Die wahrscheinlichste Higgs-Masse war nur schwach N -abhängig, während die wahrscheinlichste (entartete) Fermionmasse mit N abnimmt.

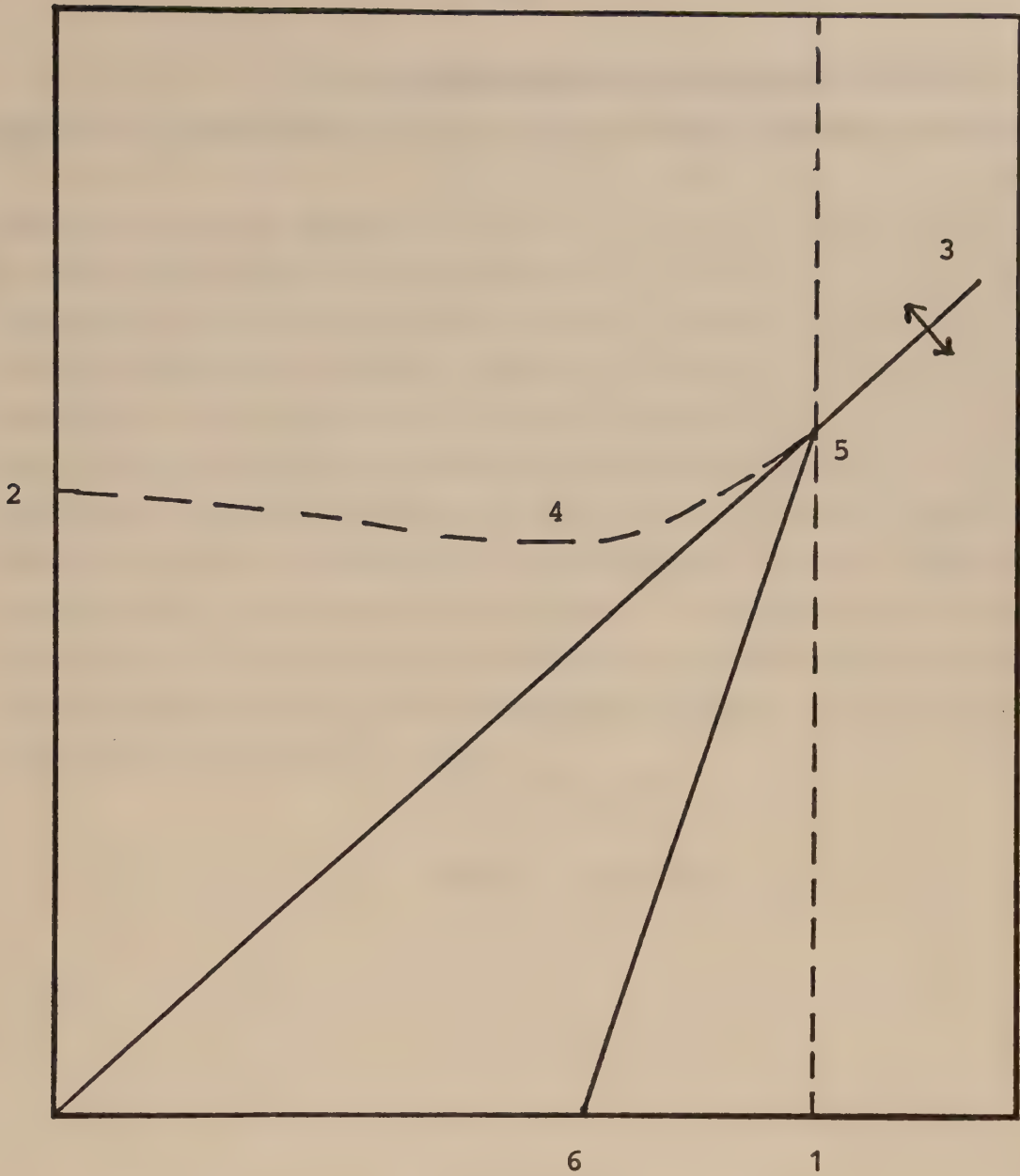


Abb. IV.7: Zusammenfassung der Reskalierungsgesetze (siehe Text).

Die Punkte 1-5 in Abbildung IV.7 werden wie folgt umskaliert:

- Punkt 1 wird durch Gl. (IV.84) gesetzt.
- Punkt 2 durch $\frac{1}{c_\lambda t}$ in Gl. (IV.110).
- die Linie 3 durch Gl. (IV.111).
- der Übergang von Punkt 2 zu Linie 3 durch die Gln. (IV.110) und (IV.111).
- Punkt 5 ist der Schnittpunkt einer senkrechten Linie durch Punkt 1 mit Linie 3.

- Punkt 6 wird durch Gl. (IV.113) gegeben.

Die Grenzen sind dann durch einen Kurvenzug durch die Punkte 2, 5 und 6 gegeben.

V. Standardmodell Erweiterungen

Dieses Kapitel soll der Diskussion der Renormierungseffekte in den zwei gängigsten Erweiterungen des Standardmodells dienen. Dabei wird soweit wie möglich auf die Ergebnisse aus Kapitel IV vergleichend zurückgegriffen. Diese Modelle werden hier nicht dargestellt. In [93] kann jeweils eine Einführung gefunden werden. Der wesentlichste Unterschied der beiden Modelle für diese Betrachtungen ist die Existenz zweier unabhängiger Higgs-Felder. Das im Standardmodell verwendete duale Higgs-Feld $\tilde{\Phi}$ wird nun ein unabhängiges Dublett mit eigener Lagrangedichte, Vakuumerwartungswert und zusätzlichen Kopplungen [94]. Die beiden Higgs-Felder werden nun Φ_1 und Φ_2 genannt. Die zugehörigen Vakuumerwartungswerte heißen v_1 und v_2 . Der Vergleich mit experimentellen Daten liefert jetzt $v^2 = v_1^2 + v_2^2$. Die Aufteilung in v_1 und v_2 ist experimentell nicht bekannt, und somit taucht ein weiterer freier Parameter r auf. Es gilt

$$v \simeq 175 \text{ GeV} \quad (\text{Anhang B}) \quad (\text{V.1})$$

$$v_1^2 = r v^2 \quad (\text{V.2})$$

$$v_2^2 = (1 - r) v^2 \quad (\text{V.3})$$

$$0 \leq r \leq 1 \quad (\text{V.4})$$

v_1 normiert M_D und M_E , während v_2 zu M_U und M_N gehört. Die Yukawa-Kopplungsmatrixen enthalten also Elemente der Form

- $g_f = \frac{m_f}{v_1}$ für down- und Elektron-artige Fermionen
- $g_f = \frac{m_f}{v_2}$ für up- und Neutrino-artige Fermionen.

Die Higgs-Sektoren der Modellerweiterungen werden hier nicht behandelt, da entweder eine ganze Reihe neuer Parameter auftauchen oder komplizierte Mechanismen verwendet werden. Verglichen mit den anderen Sektoren ist der Higgs-Sektor auch am meisten von Details des Modells abhängig.

In Anhang D sind die 1-Schleifen- β -Funktionen für Eich- und Yukawa-Kopplungen aufgelistet. Dabei sind die Koeffizienten des Standardmodells, des 2-Higgs-Standardmodells und des supersymmetrischen Standardmodells im Vergleich angegeben. Die Diskussion erfolgt in der Reihenfolge von Kapitel IV. Für das 2-Higgs-Standardmodell gibt es einige numerische Untersuchungen [95, 96] und analytische Behandlungen von Teilaspekten [97]. Für das supersymmetrische Standardmodell gibt es numerische Analysen [98, 99, 100] und analytische Teilergebnisse [101, 102].

V.1 Das 2-Higgs Standardmodell

Für den Eichsektor des 2-Higgs-Standardmodells ergeben sich praktisch keine Veränderungen. Die Koeffizienten c_i in Tabelle X.1

$$c_1 = \frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{20}{9}N + \frac{1}{3} \right] ; \quad c_2 = \frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{4}{3}N - 7 \right] ; \quad c_3 = \frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{4}{3}N - 11 \right] \quad (V.5)$$

unterscheiden sich nur minimal von denen des Standardmodells in Gl. (IV.2). Für $N = 3$ ist dieser Unterschied kleiner als 2.5% und mit wachsendem N wird er noch kleiner. Diese kleinen Veränderungen können in den Unsicherheiten der Anfangswerte und den gemachten Näherungen absorbiert werden. Somit kann die entsprechende Diskussion für das Standardmodell hier übernommen werden.

Die Renormierungsgruppengleichungen für Yukawa-Kopplungen werden wie in Anhang D angegeben modifiziert. Die Eichterme G_Y sind im Vergleich zum Standardmodell unverändert (Tabelle X.2). Die Spur T_Y wird nun abhängig von der Teilchenspezies Y (Tabelle X.4). Die für die Evolution von Phasen und Mischungswinkeln verantwortlichen Terme S_Y erhalten veränderte Koeffizienten (Tabelle X.3). Die Lösungen (IV.14–IV.16) für kleine Yukawa-Kopplungen werden vom Standardmodell identisch übernommen, da sie von G_Y bestimmt sind. Allerdings ist bei der Identifizierung mit Massen zu beachten, daß durch r teilweise bestimmt werden kann, welche Massen kleinen Kopplungen entsprechen.

Für größere Kopplungen verändern sich die Lösungen. Nimmt man für $N = 3$ wie in Kapitel IV nur ein schweres t-Quark für die Nichtlinearitäten der Renormierungsgruppengleichungen, so kann die Rechnung wiederholt werden. Für g_t ergibt sich die gleiche Differentialgleichung wie im Standardmodell (Gl. (IV.27)). Es wird ein identisches β verwendet:

$$\beta(t) = \exp\left[\frac{3}{16\pi^2} \int_0^t g_t^2(\tau) d\tau\right] \quad (V.6)$$

Da α_Y gegenüber dem Standardmodell unverändert ist (Tabelle X.2), ergeben sich für g_t identische Trivialitätsgrenzen. Bei der Umrechnung in Massen ist lediglich der für die Aufspaltung der Vakuumerwartungswerte relevante Faktor r zu berücksichtigen. Abb. IV.3 muß mit $\frac{m_t}{\sqrt{1-r}}$ an der y-Achse beschriftet werden. Nach Wiederholung der Rechnung aus Kapitel IV findet man als Ergebnis für die Evolution der Eigenwerte und Mischungswinkel:

$$g_{e,\mu,\tau}(t) = g_{e,\mu,\tau}(0) \alpha_E \quad (V.7)$$

$$g_{u,c}(t) = g_{u,c}(0) \alpha_U \beta \quad (V.8)$$

$$g_t(t) = g_t(0) \alpha_U \beta^{\frac{3}{2}} \quad (V.9)$$

$$g_{\nu_i}(t) = g_{\nu_i}(0) \alpha_N \beta \quad (V.10)$$

$$g_{d,s}(t) = g_{d,s}(0) \alpha_D \sqrt{1 + \Delta^2 L_{d,s}} \quad (V.11)$$

$$g_b(t) = g_b(0) \alpha_D \beta^{\frac{1}{6}} \sqrt{1 + \Delta^2 L_b} \quad (V.12)$$

$$\theta_1(t) = \theta_1(0) + \mathcal{O}(3) \quad (V.13)$$

$$\theta_2(t) = \theta_2(0) \beta^{-\frac{1}{6}} + \mathcal{O}(2) \quad (\text{V.14})$$

$$\theta_3(t) = \theta_3(0) \beta^{-\frac{1}{6}} + \mathcal{O}(2) \quad (\text{V.15})$$

$$\delta(t) = \delta(0) + \mathcal{O}(2) \quad (\text{V.16})$$

wobei nun gilt:

$$\Delta = 1 - \beta^{-\frac{1}{6}} \quad (\text{V.17})$$

und

$$L_b = (1 - 2\Delta^{-1})|f|^2 \quad (\text{V.18})$$

$$L_s = -\frac{L_b}{1 + \Delta^2 L_b} \quad (\text{V.19})$$

$$L_d = 0 . \quad (\text{V.20})$$

Wie im Standardmodell sind interessante Abbildungsdichten durch die unveränderten Faktoren α_Y , veränderte Potenzen von β und die Mischungen L_f gegeben. Die Struktur der Lösungen ist der in Kapitel IV sehr ähnlich (Gl. (IV.40–IV.61)). Die Kopplungen für e, μ, τ, d und s haben eine um 1 verminderte Potenz von β , wodurch β in diesen Lösungen ganz verschwindet. Die Potenz von β in g_b verändert sich von $\frac{1}{2}$ auf $\frac{1}{6}$, wodurch g_b weniger auf ein schweres t-Quark reagiert. Die Definition von Δ ändert sich so, daß der Einfluß der Mischungen größer wird.

Am interessantesten ist die Veränderung der Evolution der Winkel. θ_1 und δ bleiben wie bisher konstant. θ_2 und θ_3 erhalten eine veränderte Potenz von β . Aus $\beta^{\frac{1}{2}}$

im Standardmodell wird nun $\beta^{-\frac{1}{6}}$ im 2-Higgs-Standardmodell. Dadurch nehmen θ_2 und θ_3 bei der Evolution ab. Dieser Effekt ist um so stärker, je schwerer das t-Quark ist. Die zugehörige Abbildungsdichtematrix kann analog zu Gl. (IV.62) sofort angegeben werden.

$$\varrho_{ij} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_U \beta^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \alpha_U g_t^2(0) \beta' & 0 & 0 & 0 & ..0.. \\ \frac{1}{6} \alpha_D \beta^{-\frac{5}{6}} g_b(0) \beta' \sqrt{1 + \Delta^2 L_b} & \alpha_D \beta^{\frac{1}{6}} \sqrt{1 + \Delta^2 L_b} & 0 & 0 & ..0.. \\ \alpha_N g_{\nu_\tau}(0) \beta' & 0 & \alpha_N \beta & 0 & ..0.. \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_E & ..0.. \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad (V.21)$$

Hierbei ist

$$\beta' = \frac{d\beta(g_t(0), t)}{dg_t(0)} . \quad (V.22)$$

Wie in Kapitel IV sind die Eigenwerte der Matrix (V.21) wegen ihrer besonderen Struktur durch die Diagonalelemente gegeben. An den Abbildungsdichten verändern sich somit nur Potenzen von β . Die angegebenen Lösungen können als Werkzeug bei Strukturfragen verwendet werden. Wegen der vielen freien Parameter verzichten wir hier auf eine Diskussion.

Die in Kapitel IV durchgeführte Suche nach einer universellen Kobayashi-Maskawa-Matrix gibt hier keine andere Lösung. Es bleibt bei dem phänomenologisch uninteressanten Ergebnis in Gln. (IV.73–IV.75).

Man kann sich sofort fragen, ob dies nicht ein viel allgemeineres negatives Resultat ist. In der Tat kann die Rechnung für β -Funktionen der Form (X.2) in Anhang D mit beliebigen Koeffizienten $a_Y - k_Y$ durchgeführt werden. Immer lautet die Evolution der Mischungswinkel und der Phase:

$$\theta_1(t) = \theta_1(0) \quad (V.23)$$

$$\delta(t) = \delta(0) \quad (V.24)$$

$$\theta_{2,3}(t) = \theta_{2,3}(0) \beta^{d_D} \quad (V.25)$$

Für alle diese Lösungen ergeben sich die selben Negativresultate der Gln. (IV.73–IV.75). Somit ist bewiesen, daß für ein beliebiges Modell, welches Renormierungsgruppengleichungen der Form (X.2) mit beliebigen Koeffizienten liefert, die Evolution zu einer universellen Kobayashi-Maskawa-Matrix nicht möglich ist. Damit ist praktisch in allen bekannten Erweiterungen des Standardmodells eine universelle Kobayashi-Maskawa-Matrix für beliebige Einbettungsskala unmöglich. Dies demonstriert nochmals die Stärke dieser Lösungen für Strukturfragen und deren Realisierbarkeit in Modellen.

Die wahrscheinlichsten Parameter für $N = 3$ sind durch die Sensitivität von β bezüglich großer t -Massen bestimmt. Durch den Faktor r , der die Aufspaltung der Vakuumenerwartungswerte angibt, wird die Masse, bei der β explodiert bestimmt. Für $\Lambda = 10^{15} \text{ GeV}$ ist diese Masse $m_t \simeq 227 \text{ GeV} \cdot \sqrt{1-r}$. Bei symmetrischer Aufspaltung in v_1 und v_2 (d.h. $r = \frac{1}{2}$) ergibt dies $m_t \simeq 162 \text{ GeV}$.

Da starke repulsive Zwischenfixpunkte nur durch $\beta \gg 1$ zustande kommen, ist hier ebenfalls ein Zusammenhang der Trivialitätsgrenzen mit den wahrscheinlichsten Parametern gegeben. Die wahrscheinlichste t -Masse liegt also knapp unterhalb der Trivialitätsgrenze für m_t . Der Wert hängt vom unbekannten Faktor r ab und ist generell kleiner als im Standardmodell. Der Mischungswinkel θ_1 und die Phase δ zeigen wie im Standardmodell keine bevorzugten Werte. θ_2 und θ_3 hingegen ändern ihr Verhalten. Bei der Integration einer Gleichverteilung von hohen Skalen zu M_Z wachsen die Winkel proportional zum Anfangswert. Kleine Anfangswinkel bleiben so relativ klein. Mittlere und große Winkel werden durch die Selbstverstärkung groß. Also sind sehr kleine oder große Winkel $\theta_{2,3}$ die wahrscheinlichsten Parameter. Mittlere Werte sind dagegen unwahrscheinlich.

Für beliebiges N kann im 2-Higgs-Standardmodell die in Kapitel IV gemachte Approximation von je n_Y entarteten schweren Fermionen nicht wiederholt werden. Der Grund ist die Abhängigkeit von T_Y von der Teilchenspezies und die veränderten Koeffizienten in S_Y . Dadurch wird die Entartung durch den Renormierungsgruppenfluß aufgehoben und die Approximation zerstört sich selbst.

Ein etwas speziellerer Fall kann jedoch weiterhin untersucht werden. Wenn alle $n_Y = n$ identisch sind, kann ein Umskalierungsgesetz für die im Fall $N = 3$ abgeleiteten Trivialitätsgrenzen angegeben werden. Diese Näherung bedeutet eine Entartung aller weiteren Quark- und Lepton-Yukawa-Kopplungen. Der der Gl. (IV.84) entsprechende Umskalierungsfaktor für Abb. IV.3 ist dann

$$m \sqrt{\frac{2}{9} \cdot 8n} \cdot \sqrt{1-r} \quad \text{bei down- und Neutrino-artigen Fermionen} \quad (V.26)$$

$$m \sqrt{\frac{2}{9} \cdot 8n} \cdot \sqrt{r} \quad \text{bei up- und Elektron-artigen Fermionen.} \quad (V.27)$$

Die Bedeutung dieser Näherung kann aber nicht mehr ohne weiteres durch die enger werdende Lücke zwischen experimenteller Untergrenze und theoretischer Obergrenze für Fermionmassen begründet werden, da die Näherung sich auf Yukawa-Kopplungen, die über den Faktor $\sqrt{r}$ bzw. $\sqrt{1-r}$ mit Massen verknüpft sind bezieht. Da $0 \leq r \leq 1$ ist, und Werte von r an den Intervallgrenzen experimentell sehr auffällig wären,* könnte man jedoch $r \simeq \frac{1}{2}$ erwarten, wodurch diese Approximation gerechtfertigt sein könnte.

Ein ganz wichtiger Unterschied zum Standardmodell ist, daß selbst in dieser noch spezielleren Näherung die Mischungswinkel und Phasen nicht konstant sind. Nur für das Standardmodell ist diese Evolution eine Funktion der Massenquadrataufspaltungen in den Multipletts, welche für entartete Fermionengenerationen verschwindet (man beachte die Koeffizienten $d_Y, \dots, g_Y$ in Tabelle X.3). Im 2-Higgs-Standardmodell sind alle Zahlen $d_Y, \dots, g_Y$ positiv, wodurch die absoluten Werte der Yukawa-Kopplungen für die Evolution der Mischungsparameter relevant sind. Also sind in diesem Modell für schwere Fermionen große Veränderungen in den Mischungsparametern zu erwarten. Dieses Problem ist für $N > 3$ noch völlig ungelöst.

*Im Standardmodell sind Prozesse der Form $f\bar{f} \rightarrow H \rightarrow f'\bar{f}'$ proportional zu $g_f g_{f'} = \frac{m_f m_{f'}}{v^2}$. Im 2-Higgs-Standardmodell wird daraus $\frac{m_f m_{f'}}{v_i^2}$. Da $v_i^2 = r v^2$ (oder $(1-r)v^2$) ist, werden solche Reaktionen für $r \simeq 0$ oder $r \approx 1$ stark und sollten so experimentell auffallen.

V.2 Das supersymmetrische Standardmodell

Im supersymmetrischen Standardmodell sind die Koeffizienten c_i (Tabelle X.1) der Evolution der Eichkopplungen stark verschieden vom Standardmodell und vom 2-Higgs-Standardmodell .

$$c_1 = \frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{10}{3}N + 1 \right] ; \quad c_2 = \frac{1}{8\pi^2} [2N - 5] ; \quad c_3 = \frac{1}{8\pi^2} [2N - 9] \quad (V.28)$$

Die erste Frage, die sich nun stellt ist, was aus dem scheinbaren Zusammenhang der Eichkopplungswerte im Standardmodell und im 2-Higgs-Standardmodell wird. In Abb. IV.1 waren die drei Linien für die Eichkopplungen für positives c_i bestimmt durch

$$t_i = \frac{1}{c_i g_i^2(0)} \quad . \quad (V.29)$$

Alle Änderungen stecken also in den Größen c_i . Der Koeffizient proportional zu N in c_i ändert sich beim Übergang vom Standardmodell zum supersymmetrischen Standardmodell um einen Faktor $\frac{3}{2}$ für alle c_i . Wären auch die Konstanten in c_i durch einen Faktor $\frac{3}{2}$ verbunden, so könnte die Frage sehr einfach durch Umskalierung von t_i positiv beantwortet werden. Die Konstanten in c_i sind jedoch nicht annähernd durch einen universellen Faktor $\frac{3}{2}$ verbunden.

Die Fragestellung ist somit offen, und das Analogon zu Abb. IV.1 ist in Abb. V.1 gezeichnet. Überraschenderweise gibt es auch im supersymmetrischen Standardmodell ein N und ein t , bei denen die Trivialitätsgrenze sich innerhalb der Fehler der Anfangswerte treffen. Dazu ist $N \simeq 5$ und $\Lambda \simeq 10^{16} \text{ GeV}$ zu wählen. Somit gilt das in Kapitel IV Gesagte analog und es ist lediglich ein anderes N und eine andere Skala zu wählen.

Für Yukawa-Kopplungen (Gl. (X.2)) ergeben sich nun mehrere Veränderungen. In G_Y treten vor den Eichkopplungen andere Faktoren a_Y, b_Y und c_Y auf (Tabelle X.2). Die Eichkopplungen selbst entwickeln sich wegen der veränderten Koeffizienten c_i (Tabelle X.1) auch anders. Die die Eichevolution enthaltenden Faktoren α_Y (IV.15, IV.17–IV.24) verändern also beim Übergang zum supersymmetrischen Standardmodell ihre numerischen Werte. Es gilt aber weiterhin $0 < \alpha_Y \leq 1$. Mit Tabelle X.2 findet man

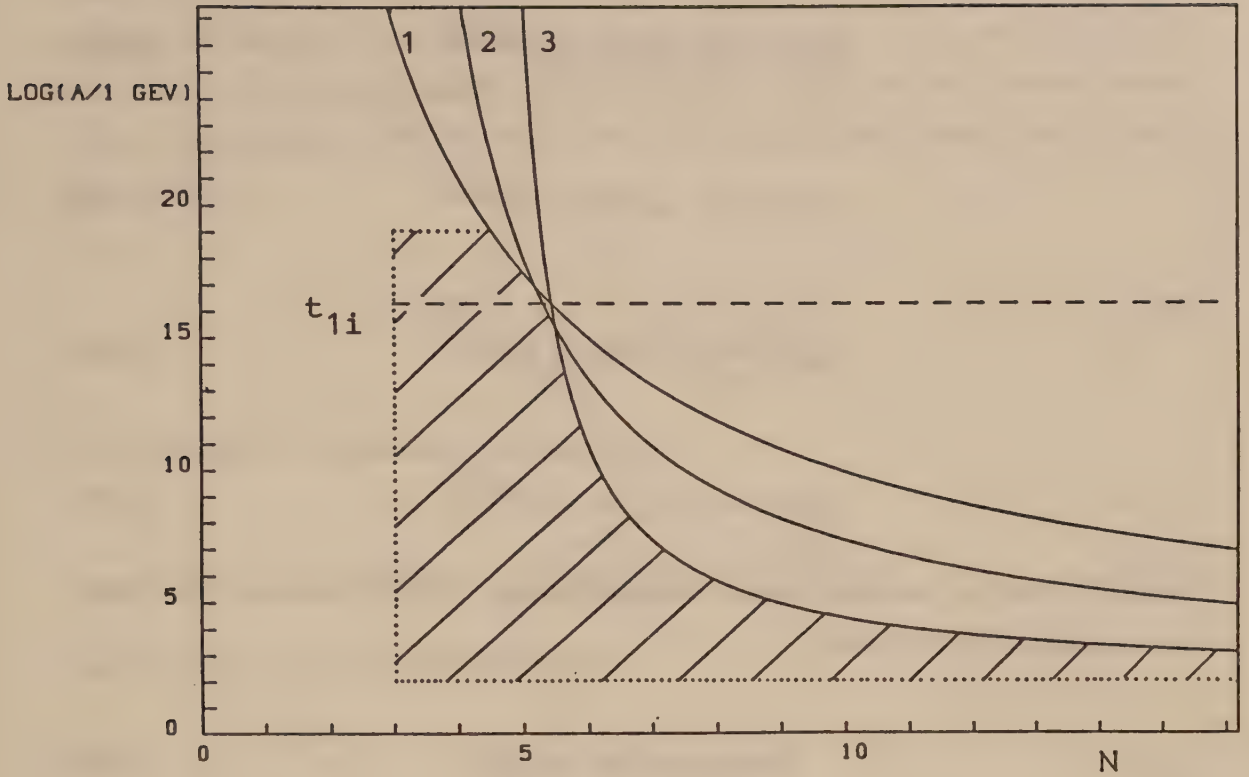


Abb. V.1: Trivialitätsgrenzen für Eichkopplungen im supersymmetrischen Standardmodell. Die Nummern an den durchgezogenen Linien geben die jeweilige Eichkopplung an. Gepunktet sind die experimentellen Untergrenzen und die Gravitations-Obergrenze für Λ gezeichnet. Die Vereinheitlichungsskala t_{1i} der Eichkopplungen ist gestrichelt gezeichnet.

$$a_Y(t) = a_Y^1(t) a_Y^2(t) a_Y^3(t) \quad (V.30)$$

$$a_U^3(t) = a_D^3(t) = (1 - g_3^2(0) c_3 t)^{\frac{1}{3\pi^2 c_3}} \quad (V.31)$$

$$a_N^3(t) = a_E^3(t) = 1 \quad (V.32)$$

$$a_Y^2(t) = (1 - g_2^2(0) c_2 t)^{\frac{3}{16\pi^2 c_2}} \quad (V.33)$$

$$a_U^1(t) = (1 - g_1^2(0) c_1 t)^{\frac{13}{144\pi^2 c_1}} \quad (V.34)$$

$$a_D^1(t) = (1 - g_1^2(0) c_1 t)^{\frac{7}{144\pi^2 c_1}} \quad (V.35)$$

$$a_N^1(t) = (1 - g_1^2(0) c_1 t)^{\frac{1}{16\pi^2 c_1}} \quad (V.36)$$

$$a_E^1(t) = (1 - g_1^2(0) c_1 t)^{\frac{3}{16\pi^2 c_1}} \quad (V.37)$$

Für in T_Y und S_Y vernachlässigbare kleine Massen sind die Lösungen der Renormierungsgruppengleichungen

$$M_Y(t) = \alpha_Y(t) M_Y(0) \quad (V.38)$$

mit $\alpha_Y(t)$ aus Gl. (V.30–V.37). Beim Übergang zur Supersymmetrie ändert sich für kleine Kopplungen lediglich die Geschwindigkeit, mit der die Eigenwerte asymptotisch verschwinden. In Gl. (V.38) findet keine Evolution der Mischungsparameter statt, da wie früher nur S_Y für schwere Fermionen die Winkel und die Phasen verändert.

Als nächstes soll der Fall $N = 3$ für ein schweres t -Quark untersucht werden. Man beachte, daß durch r teilweise bestimmt werden kann, wann die zugehörige Yukawa-Kopplung groß wird. Wie früher in Kapitel IV wird in T_Y und S_Y lediglich g_t mitgenommen. Für g_t ergibt sich nun aus der $(3, 3)$ Komponente der Renormierungsgruppengleichung eine Differentialgleichung mit veränderten Koeffizienten:

$$-16\pi^2 \frac{dg_t(t)}{dt} = [G_U(t) - 6 g_t^2] g_t \quad (V.39)$$

(Für beliebige Koeffizienten in den Tabellen X.3 und X.4 heißt der Faktor vor g_t^2 : $h_u + \frac{3}{2}d_u$). Dadurch wird die Selbstverstärkung großer Yukawa-Kopplungen

anders, wodurch die Landau-Singularität als Funktion von r und der t -Masse bei anderen Werten liegt. Um den Effekt abzuschätzen, kann man in den Gln. (IV.27) und (V.39) G_U vernachlässigen. Da die Landau-Singularität mit großen Werten von g_t verknüpft ist, sollte dies eine gute Näherung zur Bestimmung des Pols sein. Man erhält so

$$g_t^2(t) = \frac{1}{\frac{1}{g_t^2(0)} - \frac{(h_U + \frac{3}{2}d_U) t}{8\pi^2}} . \quad (V.40)$$

Der Pol gehört zu folgendem Anfangswert:

$$g_t^2(0) = \frac{8\pi^2}{(h_U + \frac{3}{2}d_U) t} = \frac{m_t^2(0)}{(1-r) v^2} . \quad (V.41)$$

Damit ergibt sich die Trivialitätsgrenze

$$m_t^2(0) = \frac{8\pi^2 (1-r) v^2}{(h_U + \frac{3}{2}d_U) t} , \quad (V.42)$$

die für $h_U = 3, d_U = 1$ und $r = 0$ grob Abb. IV.3 reproduziert. Für beliebiges r, h_u und d_u kann Gl. (V.42) verwendet werden, um ein Umskalierungsgesetz abzuleiten. Es ergibt sich so

$$m_t \sqrt{\frac{3}{4}(1-r)} \quad (V.43)$$

als neue y -Achsenbeschriftung in Abb. IV.3 für die t -Massengrenzen im supersymmetrischen Standardmodell. Für beliebige Koeffizienten in den Tabellen X.3 und X.4 lautet das Umskalierungsgesetz allgemein

$$m_t \sqrt{\frac{(1-r)\frac{9}{2}}{h_U + \frac{3}{2}d_U}} . \quad (V.44)$$

Bei numerischen Simulationen stellen sich die Gln. (V.43, V.44) als sehr zuverlässig heraus. Die Vernachlässigung der Eichkopplungen erzeugt typischerweise einen Fehler bis zu 2%.

Mit der Lösung von $g_t(t)$ können nun mit der Methode von Kapitel IV die Lösungen als Produkte von Anfangswerten, α_Y und β geschrieben werden. Man beachte, daß auch β numerisch anders als im Standardmodell bzw. 2-Higgs-Standardmodell ist, da $\beta(t)$ durch $g_t(t)$ bestimmt wird. Die Lösungen lauten:

$$g_{e,\mu,\tau}(t) = g_{e,\mu,\tau}(0) \alpha_E \quad (V.45)$$

$$g_{u,c}(t) = g_{u,c}(0) \alpha_U \beta \quad (V.46)$$

$$g_t(t) = g_t(0) \alpha_U \beta^2 \quad (V.47)$$

$$g_{\nu_i}(t) = g_{\nu_i}(0) \alpha_N \beta \quad (V.48)$$

$$g_{d,s}(t) = g_{d,s}(0) \alpha_D \sqrt{1 + \Delta^2 L_{d,s}} \quad (V.49)$$

$$g_b(t) = g_b(0) \alpha_D \beta^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + \Delta^2 L_b} \quad (V.50)$$

$$\theta_1(t) = \theta_1(0) + \mathcal{O}(3) \quad (V.51)$$

$$\theta_2(t) = \theta_2(0) \beta^{-\frac{1}{3}} + \mathcal{O}(2) \quad (V.52)$$

$$\theta_3(t) = \theta_3(0) \beta^{-\frac{1}{3}} + \mathcal{O}(2) \quad (V.53)$$

$$\delta(t) = \delta(0) + \mathcal{O}(2) \quad (V.54)$$

mit

$$\Delta = 1 - \beta^{-\frac{1}{3}} \quad (V.55)$$

und

$$L_b = (1 - 2\Delta^{-1})|f|^2 \quad (V.56)$$

$$L_s = -\frac{L_b}{1 + \Delta^2 L_b} \quad (V.57)$$

$$L_d = 0. \quad (V.58)$$

Die formalen Eigenschaften der Lösungen bleiben erhalten. Alle Ergebnisse lassen sich als Produkte von α_Y , β^ν und Mischungen $\sqrt{1 + \Delta^2 L_f}$ schreiben. Verglichen mit dem Standardmodell und dem 2-Higgs-Standardmodell haben sich einige Potenzen von β geändert. Die Evolution von Lepton-Yukawa-Kopplungen ist identisch mit dem 2-Higgs-Standardmodell. Offensichtlich ist die Anzahl der Higgs-Dubletten dafür entscheidend. Auch die leichten Quark-Generationen sind bis auf die Mischungsterme durch diese Anzahl bestimmt. In den Mischungen ist Δ jeweils anders definiert, wodurch die Größe dieser Terme in jedem Modell anders ist. Die Potenz von β in g_t ist im supersymmetrischen Standardmodell nun 2, während sie in den beiden anderen Modellen $\frac{2}{3}$ war. Auch g_b hat in jedem Modell eine andere Abhängigkeit von β .

Die Abbildungsdichte wird wegen ihrer formalen Ähnlichkeit zu Gl. (V.21) nicht nochmals angegeben, da sie keine neuen Gesichtszüge enthält.

Die wahrscheinlichsten Parameter für $N = 3$ werden auch im supersymmetrischen Fall durch β bestimmt. Der Faktor r der Aufspaltung der Vakuumenerwartungswerte und der veränderte Koeffizient von g_t^2 in Gl. (V.39) bestimmen, bei welchen t -Massen β explodiert. Mit dem Umskalierungsgesetz aus Gl. (V.43) ist diese t -Masse für $\Lambda = 10^{15} \text{ GeV}$:

$$m_t \simeq 227 \text{ GeV} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{1-r} . \quad (\text{V.59})$$

Bei symmetrischen Vakuum Erwartungswerten ($r = \frac{1}{2}$) findet man so die t -Masse $m_t \simeq 139 \text{ GeV}$.

Wie früher besteht ein enger Zusammenhang der Trivialitätsgrenzen mit den wahrscheinlichsten Parametern. Damit ist die wahrscheinlichste t -Masse

$$m_t \simeq m_F^0(\Lambda) \sqrt{\frac{3}{4}} \sqrt{1-r} , \quad (\text{V.60})$$

wobei $m_F^0(\Lambda)$ die Trivialitätsgrenze der t -Masse im Standardmodell als Funktion von Λ ist (siehe Abb. IV.3). Vergleichend ist bei der selben Skala und bei gleichem r die t -Masse im supersymmetrischen Standardmodell am kleinsten. Im 2-Higgs-Standardmodell war der Faktor $\sqrt{\frac{3}{4}}$ nicht vorhanden und im Standardmodell fehlte zusätzlich der Faktor $\sqrt{1-r}$.

Für die wahrscheinlichsten Mischungsparameter gelten die Aussagen des 2-Higgs-Standardmodells aus Kapitel V.1. θ_1 und δ sind frei, während für θ_2 und θ_3 kleine und große Winkel bevorzugt sind. Da im supersymmetrischen Standardmodell β bei der Evolution von θ_2 und θ_3 mit der Potenz $-\frac{1}{3}$ eingeht, ist diese Bevorzugung sogar stärker ausgeprägt als im 2-Higgs-Standardmodell.

Für große N soll der in Kapitel V.1 behandelte Fall $n_Y = n$ kurz erwähnt werden. Die zu den Gln. (V.26) und (V.27) entsprechenden Umskalierungsfaktoren der Abb. IV.3 lauten dann:

$$m \sqrt{\frac{2}{9} \cdot 6n} \cdot \sqrt{1-r} \quad \text{bei down - und Neutrino - artigen Fermionen} \quad (\text{V.61})$$

$$m \sqrt{\frac{2}{9} \cdot 6n} \cdot \sqrt{r} \quad \text{bei up - und Elektron - artigen Fermionen.} \quad (\text{V.62})$$

Eine wichtige Anmerkung betrifft nochmals die Evolution der Phasen und Mischungswinkel in dieser Approximation. Im Standardmodell führte die Approximation von je n_Y entarteten schweren Fermionen zu keiner Evolution der Mischungsparameter, wenn $n_U = n_D$ und $n_N = n_E$ galt. Hier ergibt sich dagegen

eine Evolution in dieser Näherung ähnlich wie im 2-Higgs-Standardmodell . Da die absolute Größe der Yukawa-Kopplungen eingeht, sollte diese Evolution sogar beträchtlich sein. Wie im 2-Higgs-Standardmodell ist dieses Problem noch völlig ungelöst.

V.3 Allgemeine Lösungen für 3 Generationen

Das Standardmodell oder entsprechende Modelle sollen zugleich renormierbar sein und eine Symmetriebrechung $SU(2)_L \times U(1) \rightarrow U(1)_{EM}$ enthalten. Die spontane Symmetriebrechung mit dem Higgs-Mechanismus ist die einzig bekannte Möglichkeit dies zu realisieren. Die Renormierbarkeit ist wichtig um eine Theorie über viele Größenordnungen etablieren zu können. Die Symmetriebrechung ist notwendig, um die experimentellen Daten richtig zu beschreiben (schwere Vektorbosonen und das Massenspektrum der Fermionen).

Damit erhält man automatisch eine Lagrangedichte analog zum Standardmodell (Gl. (VII.1))

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_Y . \quad (V.63)$$

mit Eichwechselwirkungen (G), Higgs-Wechselwirkungen (H), Fermion-Lagrangedichte (F) und Yukawa-Wechselwirkungen. Die 1-Schleifen-Renormierungsgruppengleichungen für die Eichkopplungen sind dann

$$\frac{dg_i^2(t)}{dt} = c_i g_i^4(t) \quad (V.64)$$

wobei

$$c_i = \frac{1}{8\pi^2} [p_i^2 + q_i] \quad (V.65)$$

mit reellen Zahlen p_i und q_i .

Falls einzelne $c_i > 0$ sind, entwickelt sich eine zugehörige Landau-Singularität bei

$$t_{Pol}^i = \frac{1}{g_i^2(0) c_i} . \quad (V.66)$$

Die Existenz der Lösungen fordert im weiteren

$$t < \min(t_{Pol}^i) \quad . \quad (V.67)$$

Die Renormierungsgruppengleichungen der Yukawa-Kopplungen haben dann die Form (X.2) aus Anhang D:

$$-16\pi^2 \frac{dM_Y(t)}{dt} = \left[G_Y(t) \mathbf{1} - T_Y(t) \mathbf{1} - \frac{3}{2} S_Y(t) \right] M_Y(t) \quad (V.68)$$

mit

$$G_Y = a_Y g_3^2 + b_Y g_2^2 + c_Y g_1^2 \quad (V.69)$$

$$S_Y = d_Y M_U M_U^+ + e_Y M_D M_D^+ + f_Y M_N M_N^+ + g_Y M_E M_E^+ \quad (V.70)$$

$$T_Y = Tr(h_Y M_U M_U^+ + i_Y M_D M_D^+ + j_Y M_N M_N^+ + k_Y M_E M_E^+) \quad (V.71)$$

Für die Koeffizienten $d_y - k_y$ erhält man die Tabellen V.1 und V.2 aus sehr allgemeinen Überlegungen in der Form:

Tabelle V.1

	d_Y	e_Y	f_Y	g_Y
U	x_1	$-x_2$	0	0
D	$-x_2$	x_1	0	0
N	0	0	x_3	$-x_4$
E	0	0	$-x_4$	x_3

Tabelle V.2

	h_Y	i_Y	j_Y	k_Y
U	3	$3x_5$	1	x_5
D	$3x_5$	3	x_5	1
N	3	$3x_6$	1	x_6
E	$3x_6$	3	x_6	1

Die Größen x_1 bis x_6 sind beliebige, modellabhängige reelle Parameter.
Die Koeffizienten $a_Y - c_Y$ in Gl. (V.69) sind beliebige positive Zahlen bis auf $a_N = a_E = 0, b_U = b_D = b_N = b_E$.
In dieser Situation kann die Evolution der Parameter für drei Generationen geschlossen angegeben werden. Dazu definiert man wie früher

$$\alpha_Y(t) = \exp\left[-\frac{1}{16\pi^2} \int_0^t G_Y(\tau) \, d\tau\right] . \tag{V.72}$$

mit G_Y aus Gl. (V.69) und

$$\int_0^t g_i^2(\tau) \, d\tau = -\frac{1}{c_i} \ln\left[1 - g_i^2(0)c_i t\right] . \tag{V.73}$$

wobei c_i aus Gl. (V.65) stammt. Es gilt $0 < \alpha_Y \leq 1$. Mit der Näherung, daß nur g_t in T_Y und S_Y beiträgt, findet man für g_t folgende Differentialgleichung :

$$-16\pi^2 \frac{dg_t}{dt} = \left[G_U - \left(3 + \frac{3}{2}x_1\right) g_t^2\right] g_t . \tag{V.74}$$

Wie in Kapitel V.2 findet man näherungsweise eine Obergrenze an $g_t(0)$:

$$g_t^2(0) \leq \frac{8\pi^2}{\left(3 + \frac{3}{2}x_1\right) t} . \tag{V.75}$$

Mit den Lösungen für $g_t(t)$ definiert man wie früher β :

$$\beta(t) = \exp\left[\frac{3}{16\pi^2} \int_0^t g_t^2(\tau) d\tau\right]. \quad (\text{V.76})$$

Es gilt: $1 \leq \beta$. Diese Definitionen reichen aus, um für drei Generationen die all-gemeinste Lösung der Eigenwerte und Mischungsparameter zu finden. Die einzige Voraussetzung ist, daß $\theta_i(0)$ klein sein muß, was experimentell gut erfüllt ist. Die Lösungen lauten nun:

$$g_{e,\mu,\tau}(t) = g_{e,\mu,\tau}(0) \alpha_E \beta^{x_6} \quad (\text{V.77})$$

$$g_{u,c}(t) = g_{u,c}(0) \alpha_U \beta \quad (\text{V.78})$$

$$g_t(t) = g_t(0) \alpha_U \beta^{\frac{x_1+2}{2}} \quad (\text{V.79})$$

$$g_{\nu_i}(t) = g_{\nu_i}(0) \alpha_N \beta \quad (\text{V.80})$$

$$g_{d,s}(t) = g_{d,s}(0) \alpha_D \beta^{x_6} \sqrt{1 + \Delta^2 L_{d,s}} \quad (\text{V.81})$$

$$g_b(t) = g_b(0) \alpha_D \beta^{\frac{2x_6-x_2}{2}} \sqrt{1 + \Delta^2 L_b} \quad (\text{V.82})$$

$$\theta_1(t) = \theta_1(0) + \mathcal{O}(3) \quad (\text{V.83})$$

$$\theta_2(t) = \theta_2(0) \beta^{\frac{x_2}{2}} + \mathcal{O}(2) \quad (\text{V.84})$$

$$\theta_3(t) = \theta_3(0) \beta^{\frac{x_2}{2}} + \mathcal{O}(2) \quad (\text{V.85})$$

$$\delta(t) = \delta(0) + \mathcal{O}(2) \tag{V.86}$$

mit

$$\Delta = 1 - \beta^{\frac{x_2}{2}} \tag{V.87}$$

und

$$L_b = (1 - 2\Delta^{-1})|f|^2 \tag{V.88}$$

$$L_s = -\frac{L_b}{1 + \Delta^2 L_b} \tag{V.89}$$

$$L_d = 0 \; . \tag{V.90}$$

Die Lösungen sind nur von x_1, x_2 und x_6 abhängig. Für die drei früher behandelten Modelle waren die Zahlen x_i wie in der folgenden Tabelle.

Tabelle V.3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
SM	1	1	1	1	1	1
2-Higgs-SM	1	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	0
SUSY-SM	2	$-\frac{2}{3}$	2	$-\frac{2}{3}$	0	0

VI. Zusammenfassung

Die Eichkopplungen des Standardmodells scheinen auch ohne GUT's sehr speziell zu sein. Ohne einen tieferen Zusammenhang sind die experimentellen Werte sehr unwahrscheinlich. In Kapitel IV.1 wurde ausgeführt, daß es allein sechs Möglichkeiten gibt, die drei Eichkopplungen in ihrer Größe zu ordnen. Nur die vorliegende Ordnung erlaubt eine Vereinheitlichung der Kopplungen auf einfache Weise. Auch ohne die Details der Einbettung des $U(1)$ -Generators gibt es bemerkenswerte Zusammenhänge der verschiedenen Eichsektoren. Erhöht man die Zahl der Generationen, so verlieren irgendwann alle Kopplungen ihre asymptotische Freiheit. Die nicht-abelschen Sektoren entwickeln dann wie der $U(1)$ -Sektor eine Landau-Singularität. Bemerkenswert ist, daß die Skalen der Singularitäten der drei Eichkopplungen als Funktion der Zahl der Generationen sich in einem Punkt schneiden (Abbildung IV.1). Dieser Punkt ist $N \simeq 10$, $\Lambda \simeq 10^{15} \text{ GeV}$. Diese Eigenschaften bleiben für das 2-Higgs-Standardmodell erhalten. Auch im supersymmetrischen Standardmodell findet man diese bemerkenswerte Koinzidenz, hier jedoch bei $N \simeq 5$ und $\Lambda \simeq 10^{16} \text{ GeV}$.

Nimmt man die bekannte Einbettung des $U(1)$ -Generators in GUT-Theorien hinzu, so kann man fragen, ob und wo sich alle drei Kopplungen treffen. Das ebenso bemerkenswerte, altbekannte Ergebnis ist, daß es einen von der Zahl der Generationen unabhängigen Schnittpunkt gibt. Wegen der N -Unabhängigkeit dieses Schnittpunkts liegt er für alle N bei der selben Skala wie der oben diskutierte Schnittpunkt der Landau-Singularitäten.

Es gibt im Eichsektor also starke Indizien für hohe Vereinheitlichungsskalen. Schon früher war man überrascht, daß diese Skalen beachtlich nahe an die für die Gravitation relevante Planck-Skala herankommen.

Die "Ladungen" der Gravitation, die Massen, entsprechen in diesen Modellen den Yukawa-Kopplungen. Die Renormierungsgruppengleichungen für leichte Teilchen sind linear und die Lösung führt auf einen universellen Skalenfaktor für Teilchen eines Typs. Mit diesen aus dem linearen Teil der Renormierungsgruppengleichungen abgeleiteten Evolutionen wurden großartige Teilerfolge bei der Erklärung der Massen erzielt. Am bekanntesten dürfte wohl die theoretische Vorhersage von $\frac{m_b}{m_\tau} \simeq 3$ sein. Da mittlerweile schwere Quarks realistisch erscheinen, wurden die

Nichtlinearitäten der Renormierungsgruppengleichungen für Yukawa-Kopplungen untersucht.

Mit akzeptablen Näherungen konnten sehr gute analytische Ergebnisse für die Evolution abgeleitet werden. Für drei Generationen sind dies zum erstenmal die kompletten analytischen Lösungen für Eigenwerte, Mischungswinkel und die CP verletzende Phase δ . Für N Generationen wurden die Lösungen der Eigenwerte bei vernachlässigter Mischung bestimmt. Überraschenderweise hängen die Ergebnisse nur von wenigen Variablenkombinationen ab. Da N Massen und $(N - 1)^2$ Mischungsparameter eingehen, wäre generell ein von $N + (N - 1)^2$ Parametern abhängiges Resultat zu erwarten.

In den wegen ihres Umfangs nicht explizit dargestellten Rechnungen finden aber bis zur berechneten Ordnung sehr viele gegenseitige Auslöschungen von Termen statt. Dies führt zum Beispiel für drei Generationen dazu, daß lediglich die t-Masse m_t und eine spezielle Winkelkombination $|f| = |\theta_2 + \theta_3 e^{i\delta}|$ in das Ergebnis eingeht. Eine numerische Simulation, sowie bekannte Simulationen des vollen Gleichungssystems, bestätigen diese einfachen Abhängigkeiten in den Lösungen, die ohne Vorkenntnis nicht auffallen.

Die selbe Methode wird auch auf das 2-Higgs-Standardmodell, das supersymmetrische Standardmodell und auf alle Modelle mit diesen typischen β -Funktionen angewandt; die entsprechenden Ergebnisse sind in Kapitel V zusammengestellt.

Da hier nicht auf Einbettungen eingegangen werden soll, wurde lediglich am Beispiel einer universellen Kobayashi-Maskawa-Matrix bei der Einbettungsskala die Stärke dieser analytischen Lösungen demonstriert. Als Ergebnis wurde gezeigt, daß keine Theorie mit β -Funktionen der betrachteten Form auf eine universelle Kobayashi-Maskawa-Matrix führt. β -Funktionen dieses Typs sind aber sehr allgemein in Modellen der elektroschwachen Wechselwirkung mit spontaner Symmetriebrechung.

Die gefundenen Lösungen erlauben die Anwendung physikalischer Ideen. Eine nur angedeutete Möglichkeit ist die Struktursuche bei der Einbettungsskala. Dafür gibt es in der Praxis aber zuviele freie Parameter, und ohne Modelle im Hintergrund erscheint dies willkürlich. Für gezielte Fragestellungen sind die angegebenen Lösungen aber sofort verwendbar.

Eine weitere näher behandelte Idee ist die mögliche Trivialität von Theorien. Einige Indizien sprechen dafür, daß Landau-Singularitäten allgemein auf Konsistenzprobleme hinführen. Ohne auf die Grundlagen näher einzugehen, werden für Eich- und Yukawa-Kopplungen die zugehörigen Parameterbeschränkungen im jeweiligen Kapitel abgeleitet. Für das Standardmodell wird auch die Analyse des Higgs-Sektors mit einbezogen. Man erhält Obergrenzen für die Higgs- und Fermionmassen (siehe Abbildung IV.6). Alle Ergebnisse für Modell- und N -Variationen werden als Reskalierungen der Ergebnisse für drei Generationen im Standardmodell ausgedrückt (siehe Text).

Eine weitere Idee ist, die wahrscheinlichsten Parameter zu bestimmen, wenn man alle Parameterwerte bei der Einbettung als gleich wahrscheinlich annimmt. Die analytischen Lösungen erlauben es, diese Frage mittels der daraus bestimmten Abbildungsdichtematrix zu beantworten. Wegen der großen Anfangswertsensitivität in der Nähe der Trivialitätsgrenzen werden bei der Umkehrung viele Werte innerhalb dieser Grenzen abgebildet.

Für drei Generationen und $\Lambda \simeq 10^{15} \text{ GeV}$ ergibt das Standardmodell $m_t \simeq 200 \text{ GeV}$ und $m_H \simeq 180 \text{ GeV}$. Mehr Generationen oder mehr Higgs-Dubletten lassen den Wert für Fermionmassen kleiner werden, während die Higgs-Masse nahezu konstant bleibt. θ_1 und δ haben keine bevorzugten Werte. θ_2 und θ_3 sind im Standardmodell bevorzugt klein, was experimentellen Gegebenheiten gut entspricht. In Modellen mit mehr Higgs-Dubletten sind kleine oder große Werte von θ_2 und θ_3 bevorzugt.

Für $N > 3$ wurde im Standardmodell die Möglichkeit, daß sich schwere Generationen durch die Evolution umordnen, aufgezeigt. Da bisher die Massenwerte das einzige Ordnungskriterium darstellen, ist dies ein überraschendes Resultat.

Eine sehr interessante Möglichkeit, in der näheren Zukunft aus dem Fermionenspektrum eine zweite, unabhängige Einbettungsskalenaussage zu gewinnen, wurde diskutiert. Im wesentlichen handelt es sich dabei um die Umsetzung des für weitere Generationen von Quarks und Leptonen notwendigerweise enger werdenden logarithmischen Abstands der Massen von Generation zu Generation in eine Einbettungsskala. Sollte diese Skaleninformation mit den Skalen aus dem Eichsektor zusammenfallen, so wäre dies ein extrem starkes Argument für einen solchen Ska-

lensprung und Modelle mit hohen Einbettungsskalen.

Danksagung

Herrn Dr. A. Buras bin ich an vorderster Stelle für die exzellente Betreuung meiner Arbeit, für Diskussionen und Unterstützung dankbar. Herrn Professor Dr. H.P. Dürr und Herrn Professor Dr. H. Fritzsche gilt mein Dank für ihre Bereitschaft, die Gutachten für diese Dissertation anzufertigen.

Für unzählige Diskussionen und wertvolle Zusammenarbeit möchte ich mich bei W. Bardeen, U. Baur, P. Breitenlohner, A. Duncan, J.-M. Gérard, B. Grzadkowski, J. Kühn, W. Lerche, D. Lüst, D. Maison, M. Moshe, R. Petronzio, G. Raffelt, K.H. Schwarzer, K. Sibold, H. Steger, S. Theisen und D. Wyler bedanken.

Der Max-Planck-Gesellschaft bin ich für die finanzielle Unterstützung zu Dank verpflichtet.

Den Damen Frau C. Reinke und Frau C. Maseko danke ich für die versierte Hilfe bei der Erstellung dieser Arbeit mit dem Textverarbeitungssystem $\text{\TeX}$, beziehungsweise für das Auffinden der Tipfehler in von mir mit dem "Zwei-Finger-Adler-System" getippten Passagen.

VII. Anhang A: Das Standardmodell

Hier wird die verwendete Notation gegeben und die Extraktion physikalischer Parameter aus den Massenmatrizen dargestellt.

Das Standardmodell [5] ist eine auf dem Prinzip einer spontan gebrochenen lokalen Eichsymmetrie basierende Beschreibung der Teilchenphysik. Die zugrunde liegende Gruppenstruktur ist $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, mit dem Brechungsmechanismus $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$. Die das Standardmodell definierende Lagrangedichte ist:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_Y . \quad (VII.1)$$

$\mathcal{L}_G$ ist die mit den $U(1)_Y$ ($\hat{=A}$), $SU(2)_L$ ($\hat{=B}$), $SU(3)$ ($\hat{=G}$) Eichfeldern verknüpfte Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} , \quad (VII.2)$$

und für $X = A, B$ oder G gilt

$$X_{\mu\nu} = X_{\mu\nu}^a T^a; \quad a = 1, \dots, n_g , \quad (VII.3)$$

wobei n_g die Zahl der Generatoren T^a der betrachteten Gruppe ist. Außerdem gilt

$$X_{\mu\nu}^a = \partial_\mu X_\nu^a - \partial_\nu X_\mu^a - gf^{abc} X_\mu^b X_\nu^c . \quad (VII.4)$$

Bei f^{abc} handelt es sich um die Strukturkonstanten der jeweiligen Gruppe. Die Größen X_μ^a stellen die Verallgemeinerung des aus der QED [2] bekannten Eichfeldes dar.

Mit Hilfe der Eichfelder werden die sogenannten kovarianten Ableitungen definiert, die auf bezüglich der Lorenz-Gruppe und den Eichgruppen wohl bestimmte Darstellungen wirken. Einheitsoperatoren bezüglich nicht angegebener Darstellungen werden implizit angenommen.

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_1 A_\mu + ig_2 B_\mu + ig_3 G_\mu \quad (VII.5)$$

Auch hier gilt für $X = A, B, G$: $X_\mu = X_\mu^a T^a$.

Der zweite Term in $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_H$ gehört zum Higgs-Boson System.

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V_H \quad (VII.6)$$

Das skalare Higgs-Feld ist ein $SU(2)_L$ Dublett

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} ,$$

wobei die elektrische Ladung bereits als Subskript vermerkt ist. Das Higgs-Potential V_H besteht aus Massenterm und quartischem Wechselwirkungsterm:

$$V_H = \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) + \frac{\lambda}{2} (\Phi^\dagger \Phi)^2 . \quad (VII.7)$$

Wegen der Existenz eines Grundzustandes muß $\lambda \geq 0$ gelten. Für $\mu^2 < 0$ liegt das Minimum von V_H nicht beim Ursprung, und die Voraussetzungen für die notwendige spontane Symmetriebrechung sind erfüllt.

Der Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes wird mit v bezeichnet:

$$v^2 = \langle o | \Phi^\dagger \Phi | o \rangle .$$

Es gilt folgender Zusammenhang mit den Parametern des Higgs-Potentials:

$$v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} . \quad (VII.8)$$

Um die Struktur der spontan gebrochenen Theorie besser zu sehen, wird die Lagrangedichte oft in der so bezeichneten "unitären Eichung" umgeschrieben. Damit ist die Abspaltung des Vakuumerwartungswertes gemeint:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta \end{pmatrix} . \quad (VII.9)$$

Da im Higgs-Mechanismus gleichzeitig die sogenannten Goldstone-Bosonen in die longitudinalen Freiheitsgrade des Eichfeldes übergehen, bleibt die Zahl der unabhängigen Größen unverändert. Es sei davor gewarnt, diese "Eichung" zur Renormierung des Standardmodells zu verwenden.

Mit Hilfe der unitären Eichung läßt sich der Higgs-Mechanismus sehr markant darstellen. Unter Weglassung aller Terme proportional zu η schreibt man dazu den kinetischen Teil der Higgs-Lagrangedichte $\mathcal{L}_H$ um.

$$\begin{aligned} \left(D_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right) &= \left(ig_1 A_\mu \frac{1}{2} + ig_2 B_\mu^a \frac{\tau^a}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\ &= v \begin{pmatrix} i\frac{g_2}{2}(B_\mu^1 - iB_\mu^2) \\ i\frac{g_1}{2}A_\mu - i\frac{g_2}{2}B_\mu^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (VII.10)$$

$$\begin{aligned} \left(D_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right)^+ \left(D^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right) &= \frac{g_2^2}{4} v^2 \left(B_\mu^1 B_1^\mu + B_\mu^2 B_2^\mu \right) \\ &\quad + \frac{v^2}{4} (g_1 A_\mu - g_2 B_\mu^3)(g_1 A^\mu - g_2 B_3^\mu) \end{aligned} \quad (VII.11)$$

Aus dem abgespaltenen Vakuumerwartungswert im kinetischen Teil von $\mathcal{L}_H$ entstehen Massenterme für die Eichfelder über die kovarianten Ableitungen. Um nun ein masseloses Photon und ein massives neutrales Vektorboson zu erhalten, muß man Linearkombinationen von A_μ und B_μ^3 einführen.

$$\begin{aligned} F_\mu &= A_\mu \cos \theta_W + B_\mu^3 \sin \theta_W \\ Z_\mu &= -A_\mu \sin \theta_W + B_\mu^3 \cos \theta_W \end{aligned} \quad (VII.12)$$

Invertiert man diese Relationen und ersetzt dann oben A_μ, B_μ^3 , so muß $g_1 A_\mu - g_2 B_\mu^3 \sim Z_\mu$ sein um keine Photonmasse zu erhalten. Durch diese Bedingung wird θ_W fixiert: $\tan \theta_W = \frac{g_1}{g_2}$. Schreibt man D_μ in den neuen Feldern F und Z , so findet man:

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} aF_\mu & 0 \\ 0 & -bZ_\mu \end{pmatrix} \quad (VII.13)$$

$$a = g_1 \cos \theta_W + g_2 \sin \theta_W = \frac{2g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$$

$$b = g_1 \sin \theta_W + g_2 \cos \theta_W = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$$

Der Koeffizient vor dem Photon F_μ soll "ie" sein:

$$e = \frac{a}{2} = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} ; \quad \alpha_{EM} = \frac{e^2}{4\pi} . \quad (VII.14)$$

Es werden noch die geladenen Vektor-Boson-Felder $W_\pm$ definiert:

$$W_\pm^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_1^\mu \pm iB_2^\mu) . \quad (VII.15)$$

Damit sind folgende Massenterme entstanden:

$$m_W^2 = \frac{g_2^2 v^2}{4} , \quad m_Z^2 = \frac{(g_1^2 + g_2^2)v^2}{4} = \frac{m_W^2}{\cos^2 \theta_W} . \quad (VII.16)$$

Der nächste Term $\mathcal{L}_F$ ist die freie Lagrangedichte der Fermionen im Model. Die Beschreibung basiert auf links- und rechtshändigen Komponenten von Spinoren:

$$\Psi_l = \frac{1 - \gamma_5}{2} \Psi ; \quad \Psi_r = \frac{1 + \gamma_5}{2} \Psi . \quad (VII.17)$$

Es gibt folgende Spinoren:

$$Q_l = \begin{pmatrix} U_i \\ D_i \end{pmatrix}_l , \quad L_l = \begin{pmatrix} N_i \\ E_i \end{pmatrix}_l \quad (SU(2)\text{Doublets})$$

$$U_r = (U_i)_r , D_r = (D_i)_r ; \quad E_r = (E_i)_r \quad (SU(2)\text{Singletts}) ,$$

und im Falle massiver Neutrinos ebenfalls $N_r = (N_i)_r$. Der Index "i" deutet an, daß es sich jeweils zusätzlich um Vektoren im Raum der Generationen handelt. Das Subskript ℓ oder r besagt, ob die links- oder rechtshändige Komponente gemeint ist. U, D, E und N stehen für up-artige Quarks, down-artige Quarks, Elektron-artige Leptonen und Neutrino-artige Leptonen. Generell wird U, D, N, E benutzt um die Teilchenspezies anzugeben. Wo es notwendig ist, werden die üblichen

Namen der einzelnen Teilchen mit kleinen Buchstaben angeben:

u = up, c = charm, t = top

d = down, s = strange, b = bottom

e = Elektron, μ = Myon, τ = Tau

ν_e = Elektron-Neutrino, ν_μ = Myon-Neutrino, ν_τ = Tau-Neutrino

Damit schreibt sich $\mathcal{L}_F$:

$$\mathcal{L}_F = \bar{Q}_l \not{D} Q_l + \bar{L}_l \not{D} L_l + \bar{U}_r \not{D} U_r + \bar{D}_r \not{D} D_r + \bar{E}_r \not{D} E_r + \bar{N}_r \not{D} N_r, \quad (VII.18)$$

wobei $\not{D} \equiv i\gamma^\mu D_\mu$.

Der letzte Term in $\mathcal{L}$ ist $\mathcal{L}_Y$. Er dient dazu den Fermionen eine Masse zu geben, die in der ungebrochenen Theorie aus Symmetriegründen verboten sind. Nach der Symmetriebrechung entstehen daraus Massenterme proportional zu v :

$$\mathcal{L}_Y = \bar{Q}_l \frac{\tilde{\Phi}}{v} M_D D_r + \bar{Q}_l \frac{\tilde{\Phi}}{v} M_U U_r + \bar{L}_l \frac{\tilde{\Phi}}{v} M_E E_r + \bar{L}_l \frac{\tilde{\Phi}}{v} M_N N_r + h.c. \quad (VII.19)$$

"h.c." steht als Abkürzung für die hermitesch konjugierten Terme. $\tilde{\Phi}$ ist das duale Higgs-Feld, welches gebraucht wird um up-Quarks und Neutrinos Massen geben zu können.

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ -\phi_- \end{pmatrix}; \quad \phi_- = (\phi_+)^* \quad (VII.20)$$

M_Y , $Y = U, D, N, E$, sind jeweils Massenmatrizen im Raum der Generationen. In unitärer Eichung sieht $\mathcal{L}_Y$ folgendermaßen aus:

$$\mathcal{L}_Y = \bar{D}_l M_D D_r + \bar{U}_l M_U U_r + \bar{E}_l M_E E_r + \bar{N}_l M_N N_r + h.c. \quad (VII.21)$$

Man erkennt wie in gebrochener Phase Massenterme entstehen. Im allgemeinen sind die komplexen Massenmatrizen nicht diagonal. Eine beliebige komplexe Matrix kann durch nichtsinguläre Matrizen A_Y und B_Y in reelle Diagonalform gebracht werden:

$$A_Y M_Y B_Y^{-1} = \mathbb{D}_Y \text{ oder } B_Y M_Y^+ A_Y = \mathbb{D}_Y = \text{diag}(g_{f_1}, \dots) . \quad (VII.22)$$

Durch Inversion findet man:

$$M_Y = A_Y^{-1} \mathbb{D}_Y B_Y , \quad M_Y^+ = B_Y^{-1} \mathbb{D}_Y A_Y .$$

Hiermit werden die Massenmatrizen von $\mathcal{L}_Y$ in unitärer Eichung umgeschrieben:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & \bar{D}_l A_D^{-1} \mathbb{D}_D B_D D_r + \bar{U}_l A_U^{-1} \mathbb{D}_U B_U U_r \\ & + \bar{E}_l A_E^{-1} \mathbb{D}_E B_E E_r + \bar{N}_l A_N^{-1} \mathbb{D}_N B_N N_r + h.c. \end{aligned} \quad (VII.23)$$

Durch die Definition neuer Spinoren ist $\mathcal{L}_Y$ dann diagonal:

$$\left. \begin{aligned} Y'_r &= B_Y Y_r \\ Y'_l &= A_Y Y_l \end{aligned} \right\} \text{ wobei } Y = U, D, N, E . \quad (VII.24)$$

Wie wir gleich sehen werden, kann diese Redefinition aber nicht auch noch gleichzeitig die geladenen Ströme diagonalisieren. Diese sind Bestandteil von $\mathcal{L}_F$, wo die Feldredefinition (VII.24) ebenfalls gemacht wird. Hierbei sind nur die $SU(2)$ Doubletts interessant:

$$\mathcal{L}_F = \bar{Q}_l i \not{D} Q_l + \bar{L}_l i \not{D} L_l + \dots (\text{Singletts}) \quad (VII.25)$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_l i \not{D} Q_l = & \bar{Q}_l i \gamma^\mu (\partial_\mu + i g_2 W_\mu^+ \frac{\tau^+}{2} + i g_2 W_\mu^- \frac{\tau^-}{2} \\ & + i e F_\mu (\frac{1 + \tau^3}{2}) i \frac{g_1 g_2}{e} Z_\mu (\frac{1 - \tau^3}{2}) + \dots) Q_l \end{aligned} \quad (VII.26)$$

(für $\bar{L}_l i \not{D} L_l$ entsprechend). Die geladenen Ströme sind diejenigen Anteile in $\mathcal{L}_F$ proportional zu $W_\mu^\pm$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ch}^Q = & -g_2 [W_\mu^+ (\bar{Q}_l \gamma^\mu \tau^+ Q_l) + W_\mu^- (\bar{Q}_l \gamma^\mu \tau^- Q_l)] \\ = & -g_2 [W_\mu^+ (\bar{U}_l \gamma^\mu D_l) + W_\mu^- (\bar{D}_l \gamma^\mu U_l)] \end{aligned} \quad (VII.27)$$

Unter Anwendung der Feldredefinitionen (VII.24) erhalten wir:

$$\mathcal{L}_{ch}^Q = -g_2 \left[W_\mu^+ (\bar{U}'_l (A_U A_D^{-1}) \gamma^\mu D'_l) + W_\mu^- (\bar{D}'_l (A_U A_D^{-1})^{-1} \gamma^\mu U'_l) \right] . \quad (VII.28)$$

Das heißt, von der Diagonalisierung der Massenmatrizen bleibt die sogenannte Kobayashi-Maskawa-Mischungsmatrix [103] in den geladenen Strömen zurück.

$$U_{KM}^Q = A_U A_D^{-1} \quad (VII.29)$$

Anders ausgedrückt, kann man im allgemeinen nicht gleichzeitig die geladenen Ströme und die Massenmatrizen diagonalisieren. Für $M_N \neq 0$ erhält man analog eine leptonische Mischungsmatrix U_{KM}^L . Die oben eingeführte Kobayashi-Maskawa-Matrix hat folgende Eigenschaften:

$$(U_{KM})^+ U_{KM} = \mathbf{1} ; \quad (VII.30)$$

$$\det(U_{KM}) = 1 . \quad (VII.31)$$

Mit Hilfe von $SU(N)$ Matrizen kann man schreiben:

$$U_{KM} = e^{i\epsilon_a T^a} . \quad (VII.32)$$

Zweimal die Anzahl der diagonalen Generatoren von $SU(N)$ kann in den Felddefinitionen absorbiert werden. Deshalb hat U_{KM} insgesamt $(N-1)^2$ Parameter. Eine weit verbreitete Parametrisierung für 3 Generationen durch Rotationsmatrizen R_{ij} und eine Phase $e^{i\delta}$ wurde von [103] eingeführt.

$$\begin{aligned} U_{KM} &= R_{23}(\theta_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{i\delta} \end{pmatrix} R_{12}(\theta_2) R_{23}(-\theta_3) \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 c_3 & -s_1 s_3 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (VII.33)$$

wobei gilt: $c_i = \cos \theta_i$, $s_i = \sin \theta_i$.

Für mehr Generationen wollen wir hier eine Methode von Harrari und Leurer zum Erweitern der Parametrisierung verwenden [104]. Die oben in (VII.33) explizit angegebene K-M Parametrisierung wird durch anhängen von Zeilen und Spalten mit "1" in der Diagonalen und "0" in den anderen Elementen erweitert zu einer $n \times n$ Matrix U'_{KM} . Die neuen Freiheitsgrade für N Generationen werden durch Multiplikation mit Matrizen Ω_{ij} eingeführt ($i \neq j$):

$$U_{KM(N)} = \Omega_{N-1,N} \Omega_{N-2,N} \dots \Omega_{1,N} \Omega_{N-2,N-1} \dots \Omega_{1,N-1} \dots \Omega_{1,4} \cdot U'_{KM} . \quad (VII.34)$$

Die Produktreihe endet bei $\Omega_{1,4}$, da $\Omega_{2,3} \Omega_{1,3} \Omega_{1,2}$ bereits in U'_{KM} enthalten ist. Ω_{ij} hat die Form einer komplexen Rotationsmatrix. Alle Elemente entsprechen einer Einheitsmatrix bis auf

$$\begin{aligned} (\Omega_{ij})_{ii} &= (\Omega_{ij})_{jj} = \cos \theta_{ij} \\ (\Omega_{ij})_{ij} &= -(\Omega_{ij})_{ji}^* = \sin \theta_{ij} e^{-\delta_{ij}} \end{aligned} \quad (VII.35)$$

Falls $|i - j| = 1$ ist $\delta_{ij} \equiv 1$. Sonst sind die Winkel freie Parameter.

VIII. Anhang B: Verwendete experimentelle Daten

Für numerische Berechnungen wurden folgende Daten verwendet [105, 26, 25]:

$$M_Z = 92 \pm 2 \text{ GeV}, \quad v = 175 \pm 1 \text{ GeV}, \quad N \geq 3 \quad (\text{VIII.1})$$

$$\frac{4\pi^2}{e^2} = \alpha_{EM}^{-1}(M_Z) = 128 \pm 0.1$$

$$\sin^2 \theta_W = 0.23 \pm 0.01$$

$$\alpha_3(M_Z) = 0.1 \pm 0.01$$

Daraus ergibt sich

$$g_1^2(0) = 0.127 \pm 0.009 \quad (\text{VIII.2})$$

$$g_2^2(0) = 0.425 \pm 0.006 \quad (\text{VIII.3})$$

$$g_3^2(0) = 1.27 \pm 0.13 \quad (\text{VIII.4})$$

Der Index i von g_i^2 gibt die Gruppe an.

Weiterhin gilt:

$$t = 0 \iff \Lambda = M_Z = 92 \text{ GeV}$$

Für die Fermionmassen werden folgende Zahlen verwendet:

(Alle Massen sind auf eine Skala von $M_Z = 92 \text{ GeV}$ bezogen. Die Werte errechnen sich aus den Quarkmassen bei 1 GeV aus [25] und den physikalischen Leptonmassen aus [26] mittels Renormierungsgruppengleichungen mit einer effektiven Zahl von Fermionen).

Tabelle VIII.1

1. Generation	2. Generation	3. Generation	Q_{EM}	Q_{QCD}
$u = 3.2 \text{ MeV}$	$c = 0.85 \text{ GeV}$	$t > 23 \text{ GeV}$	$2/3$	$\times$
$d = 5.6 \text{ MeV}$	$s = 111 \text{ MeV}$	$b = 3.36 \text{ GeV}$	$-1/3$	$\times$
$e^- = 490 \text{ KeV}$	$\mu^- = 101.4 \text{ MeV}$	$\tau^- = 1.71 \text{ GeV}$	-1	0
$\nu_e < 45 \text{ eV}$	$\nu_\mu < 24 \text{ MeV}$	$\nu_\tau < 68 \text{ MeV}$	0	0

Für die Mischungswinkel und die Phase wird verwendet:

$$\theta_1 = 0.224 \pm 0.002$$

$$\theta_2 = 0.05 \pm 0.05$$

$$\theta_3 = 0.01 + \begin{matrix} +0.06 \\ -0.01 \end{matrix}$$

IX. Anhang C: Standardmodell Renormierungsgruppengleichungen

Die Renormierungsgruppengleichungen des Standardmodell gliedern sich in drei Teilbereiche: a) Eichsektor, b) Yukawa-Sektor und c) Higgs-Sektor. Die Gleichungen sind teilweise entkoppelt. Die hier aufgelisteten β -Funktionen stammen aus [106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113]. Auf mögliche Probleme für höhere Ordnungen wird hier nicht eingegangen [114]. Mit Hilfe der zwei gleichwertigen SkalenvARIABLEN $t = \frac{1}{2} \ln (Q^2/M_Z^2)$ und $\Lambda = M_Z \cdot 10^{(t \log e)}$ gilt auf dem 1-loop Niveau für die einzelnen Sektoren:

a) Eichkopplungen

g_1, g_2, g_3 sind die $U(1), SU(2), SU(3)$ 1-Schleifen-effektiven-Eichkopplungen mit folgenden β -Funktionen:

$$\frac{dg_i^2(t)}{dt} = \beta_i = c_i g_i^4(t) \quad (IX.1)$$

$$c_1 = \frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{20}{9}N + \frac{1}{6} \right], \quad c_2 = \frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{4}{3}N - \frac{43}{6} \right], \quad c_3 = \frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{4}{3}N - 11 \right] \quad (IX.2)$$

Hierbei ist N die Zahl der Generationen.

b) Yukawa-Kopplungen

$$-16\pi^2 \frac{dM_Y(t)}{dt} = [G_Y(t) \mathbf{1} - T(t) \mathbf{1} - \frac{3}{2}S_Y(t)] M_Y(t) \quad (IX.3)$$

wobei M_Y, S_Y und $\mathbf{1}$ Matrizen im Raum der Generationen sind.

$Y = U, D, N, E$ steht für die entsprechenden Quarks und Leptonen.

$$S_U = M_U M_U^+ - M_D M_D^+ = -S_D \quad (IX.4)$$

$$S_N = M_N M_N^+ - M_E M_E^+ = -S_E \quad (IX.5)$$

$$T = \text{Spur}(3M_U M_U^+ + 3M_D M_D^+ + M_N M_N^+ + M_E M_E^+) \quad (IX.6)$$

$$G_U = 8g_3^2 + \frac{9}{4}g_2^2 + \frac{17}{12}g_1^2 \quad (IX.7)$$

$$G_D = 8g_3^2 + \frac{9}{4}g_2^2 + \frac{5}{12}g_1^2 \quad (IX.8)$$

$$G_N = \frac{9}{4}g_2^2 + \frac{3}{4}g_1^2 \quad (IX.9)$$

$$G_E = \frac{9}{4}g_2^2 + \frac{15}{4}g_1^2 \quad (IX.10)$$

c) Higgs-Kopplung

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \beta_\lambda = c_\lambda \left(\lambda^2 - \left[\frac{1}{4}g_1^2 + \frac{3}{4}g_2^2 - \frac{T}{3} \right] \lambda + \frac{1}{16}g_1^4 + \frac{1}{8}g_1^2 g_2^2 + \frac{3}{16}g_2^4 - \frac{H}{3} \right) \quad (IX.11)$$

$$c_\lambda = \frac{6}{8\pi^2} \quad (IX.12)$$

T wie in (IX.6)

$$H = \text{Spur} \left(3 (M_U M_U^+)^2 + 3 (M_D M_D^+)^2 + (M_N M_N^+)^2 + (M_E M_E^+)^2 \right) \quad (IX.13)$$

X. Anhang D: Modellerweiterungen

Hier werden die 1-Schleifen-Renormierungsgruppengleichungen von den zwei gängigsten Modellerweiterungen aufgelistet: Das Standardmodell mit zwei unabhängigen Higgs-Dubletts und das supersymmetrische Standardmodell mit weicher (soft) Symmetriebrechung, welches auch zwei Higgs-Dubletts hat. Aus allen möglichen Modellen mit zwei Higgs-Dubletten die das Glashow-Weinberg-Natürlichkeitskriterium [115] erfüllen, werden die einfachsten ausgewählt. Das duale Higgs-Dublett wird so zu einem unabhängigen Feld Φ_2 . Die β -Funktionen stammen aus [100, 102, 79, 116].

Die Auflistung ist teilweise analog zum Standardmodell : a) Eichsektor, b) Yukawa Sektor. Auf den Higgs-Sektor wird nicht eingegangen. Da dort einige Freiheiten bestehen, gibt es sehr viele Anpassungsmöglichkeiten. Die Higgs-Kopplungen werden deswegen in dieser Arbeit deswegen nicht allgemein diskutiert.

Die Gleichungen werden mit allgemeinen Koeffizienten geschrieben. Die Werte der Koeffizienten stehen in den folgenden Tabellen.

Auch hier wird die Skalenvariable $t = \frac{1}{2} \ln (Q^2/M_Z^2)$ verwendet.

a) Eichkopplungen

g_1, g_2, g_3 sind die $U(1), SU(2), SU(3)$ 1-Schleifen effektiven Eichkopplungen mit folgenden β -Funktionen:

$$\frac{dg_i^2(t)}{dt} = \beta_i = c_i g_i^4(t) \quad (X.1)$$

Die Werte von c_i folgen aus folgender Tabelle:

Tabelle X.1

	$8\pi^2c_1$	$8\pi^2c_2$	$8\pi^2c_3$
SM	$\frac{20}{9}N + \frac{1}{6}$	$\frac{4}{3}N - \frac{43}{6}$	$\frac{4}{3}N - 11$
2-Higgs SM	$\frac{20}{9}N + \frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}N - 7$	$\frac{4}{3}N - 11$
SUSY SM	$\frac{10}{3}N + 1$	$2N - 5$	$2N - 9$

Hierbei ist N die Zahl der Generationen.

b) Yukawa Kopplungen

$$-16\pi^2\frac{dM_Y(t)}{dt} = [G_Y(t) \mathbf{1} - T_Y(t) \mathbf{1} - \frac{3}{2}S_Y(t)]M_Y(t) \text{ ,} \tag{X.2}$$

wobei M_Y, S_Y und $\mathbf{1}$ Matrizen im Raum der Generationen sind.
 $Y = U, D, N, E$ steht für die entsprechenden Quarks und Leptonen.

$$G_Y = a_Y g_3^2 + b_Y g_2^2 + c_Y g_1^2 \tag{X.3}$$

$$S_Y = d_Y M_U M_U^+ + e_Y M_D M_D^+ + f_Y M_N M_N^+ + g_Y M_E M_E^+ \tag{X.4}$$

$$T_Y = Tr(h_Y M_U M_U^+ + i_Y M_D M_D^+ + j_Y M_N M_N^+ + k_Y M_E M_E^+) \tag{X.5}$$

Die Koeffizienten a_Y-k_Y sind in den folgenden Tabellen aufgelistet:

Tabelle X.2

SM+2-Higgs SM	a_Y	b_Y	c_Y
$Y = U$	8	$\frac{9}{4}$	$\frac{17}{12}$
$Y = D$	8	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{12}$
$Y = N$	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}$
$Y = E$	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{15}{4}$
SUSY SM	a_Y	b_Y	c_Y
$Y = U$	$\frac{16}{3}$	3	$\frac{13}{9}$
$Y = D$	$\frac{16}{3}$	3	$\frac{7}{9}$
$Y = N$	0	3	1
$Y = E$	0	3	3

Tabelle X.3

SM	d_Y	e_Y	f_Y	g_Y
$Y = U$	1	-1	0	0
$Y = D$	-1	1	0	0
$Y = N$	0	0	1	-1
$Y = E$	0	0	-1	1
2-Higgs SM	d_Y	e_Y	f_Y	g_Y
$Y = U$	1	$\frac{1}{3}$	0	0
$Y = D$	$\frac{1}{3}$	1	0	0
$Y = N$	0	0	1	$\frac{1}{3}$
$Y = E$	0	0	$\frac{1}{3}$	1
SUSY SM	d_Y	e_Y	f_Y	g_Y
$Y = U$	2	$\frac{2}{3}$	0	0
$Y = D$	$\frac{2}{3}$	2	0	0
$Y = N$	0	0	2	$\frac{2}{3}$
$Y = E$	0	0	$\frac{2}{3}$	2

Tabelle X.4

SM	h_Y	i_Y	j_Y	k_Y
$Y = U$	3	3	1	1
$Y = D$	3	3	1	1
$Y = N$	3	3	1	1
$Y = E$	3	3	1	1
2-Higgs SM	h_Y	i_Y	j_Y	k_Y
$Y = U$	3	0	1	0
$Y = D$	0	3	0	1
$Y = N$	3	0	1	0
$Y = E$	0	3	0	1
SUSY SM	h_Y	i_Y	j_Y	k_Y
$Y = U$	3	0	1	0
$Y = D$	0	3	0	1
$Y = N$	3	0	1	0
$Y = E$	0	3	0	1

XI. Anhang E: Physikalische Fermion- und Higgsmassen

In dieser Arbeit ist, sofern nicht anders angegeben, jede Masse bei der Skala $\mu = M_Z$ normiert. Die Masse ist in allen Quantenfeldtheorien eine skalenabhängige Größe, und deshalb muß eine Definition für die physikalische Masse gegeben werden.

Um die physikalischen Massen zu erhalten sind die folgenden Bedingungen zu verwenden:

$$m^{phys} = m(\mu = m) ,$$

oder

$$m^{phys} = m(\mu = 2m) .$$

Die zu verwendende Definition der physikalischen Masse ist von der experimentellen Bestimmung abhängig. Die erste Definition wird bei der Bestimmung der Massen aus Bindungszuständen des schweren Quarks mit leichten Quarks angebracht sein, während die zweite Definition bei der Massenbestimmung aus der Schwelle für Paarproduktion oder aus Quarkonia relevant ist.

Bei der Integration wird von $\mu = M_Z$ bis $\mu = \Lambda$ mit N Generationen gerechnet. Da die resultierenden Massen niemals sehr groß gegenüber M_Z werden, würde die Integration mit einer effektiven Zahl von Fermionen das Ergebnis nur minimal verändern.

Die relativen Korrekturen sind

$$\frac{\ln\left(\frac{m^{phys}}{M_Z}\right)}{\ln\left(\frac{\Lambda}{M_Z}\right)} .$$

Da m^{phys} von der Größenordnung von M_Z ist und Λ einige Zenerpotenzen größer ist, sind diese Faktoren sehr viel kleiner als Eins.

Prinzipiell können die Lösungen auch mit der jeweils gültigen Zahl von Fermionen stückweise zusammengesetzt werden. Die Nahtstellen sind jedoch durch obige Selbstkonsistenzbedingung bestimmt und das Problem wird dadurch unnötig kompliziert.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Einige Lehrbücher hierzu sind:
 N.N. Bogoliubov, D. Shirkov, "Quantum Fields", Benjamin/Cummings, Reading-Massachusetts (1983);
 C. Itzykson, "Quantum Field Theory", McGraw Hill, New York (1980);
 P. Becher, M. Böhm, H. Joos, "Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung", Teubner, Stuttgart (1981).

- [2] Ein Lehrbuch hierzu ist:
 J.M. Jauch, F. Rohrlich, "The Theory of Photons and Electrons", Springer, Berlin (1976).

- [3] Übersichtsartikel über die QCD sind z.B.:
 W. Marciano, H. Pagels, Phys. Rep. 36 (1978) 137;
 G. Altarelli, Phys. Rep. 81 (1982) 1;
 A.J. Buras, Rev. Mod. Phys. 52 (1980) 199.

- [4] J.C. Collins, "Renormalization", Cambridge University Press, New York (1984);
 Renormalization Theory, G. Velo and A.S. Wightman eds., Proceedings Erice 1975, Reidel;
 J. Lowenstein, Seminars on Renormalization Theory, University of Maryland Report 1972;
 K. Hepp in Renormalization Theory in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, Proceedings Les Houches 1970;
 R. Stora in Particle Physics, Proceedings Les Houches 1971;
 N. Nakanishi, "Graph Theory and Feynman Integrals", Gordon and Breach 1971;
 W. Zimmermann in Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory, Proceedings Brandeis 1970;
 W. Zimmermann, Com. Math. Phys. 15 (1969) 208;
 W. Zimmermann, Annals of Physics 77 (1972) 536;
 P. Breitenlohner, D. Maison, Com. Math. Phys. 52 (1977) 11, 39, 55.

- [5] S.L. Glashow, Nucl. Phys. 22 (1961) 579;
 S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1264;
 A. Salam, Proc. 8th Nobel Symposium, Aspenäs garden 1968,
 ed. N. Svartholm (Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1968);
 Ein Übersichtsartikel ist etwa:
 M.A.B. Beg, A.Sirlin, Phys. Rep. 88 (1982) 1;
 Hierzu gibt es auch Darstellungen in Lehrbüchern:
 T.-P. Cheng, L.-F. Li, "Gauge Theory of Elementary Particle Physics",
 Oxford University Press, New York (1984);
 K. Huang, "Quarks Leptons & Gauge Fields", World Scientific, Singapur
 (1982).
- [6] G. Arnison et al., Phys. Lett. 122 B (1983) 103;
 M. Banner et al., Phys. Lett. 122 B (1983) 476;
 G. Arrison et al., Phys. Lett. 126 B (1983) 398;
 P. Baguaia et al., Phys. Lett. 129 B (1983) 130.
- [7] Durch die Entdeckung der Teilchen τ^- , ν_τ , b :
 M.L. Perl et al., Phys. Rev. Lett. 35 (1975) 1489;
 M.L. Perl et al., Phys. Lett. 70 B (1977) 487;
 S.W. Herb et al., Phys. Rev. Lett. 39 (1977) 252;
 L.M. Lederman, Proceedings of 19th Int. Conf. High Energy Phys.
 (Tokyo), Physical Society of Japan, Tokyo (1978).
- [8] Siehe etwa:
 H. Georgi, D.V. Nanopoulos, Phys. Lett. 82 B (1979) 95;
 H.E. Haber, G.L. Kane, T. Sterling, Nucl. Phys. B 161 (1979) 493.
- [9] Siehe etwa:
 R.D. Peccei, Proceedings of the XIth Int. Conf. on Neutrino Phys. and
 Astrophys., Nordkirchen (1984).
- [10] Siehe etwa:
 P. van Nieuwenhuizen, Phys. Rep. 68 (1981) 189.

- [11] Siehe etwa:
S.L. Glashow, J. Iliopoulos, L. Maiani, Phys. Rev. D **3** (1981) 1043.
- [12] Ein Übersichtsartikel ist:
W. Buchmüller, Acta Physica Austriaca, Suppl. XXVII (1985) 517.
- [13] H. Fritzsch, Proc. Int. School of Subnuclear Physics, Erice (1983).
- [14] M. Gell-Mann, P. Ramond, R. Slansky, Rev. Mod. Phys. 50 (1978) 721.
- [15] Ein Übersichtsartikel über GUT's ist etwa:
P. Langacker, Phys. Rep. 72 (1981) 185;
Ein Textbuch hierzu ist:
G.G. Ross, "Grand Unified Theories", Benjamin/Cummings, Reading-Massachusetts (1984).
- [16] R.N. Mohapatra, "Left-Right Symmetry Models of Weak Interactions" in "Quarks, Leptons and beyond"; Proceedings of 1983 NATO ASI in Munich, New York (1985).
- [17] Eine Sammlung wichtiger reprints ist:
E. Fahri, R. Jackiw, "Dynamical Gauge Symmetry Breaking", World Scientific, Singapur (1982);
Ein Übersichtsartikel ist:
E. Fahri, L. Susskind, Phys. Rep. 74 (1981) 277.
- [18] Ein Lehrbuch:
J. Wess, J. Bagger, "Supersymmetry and Supergravity", Princeton Univ. Press, Princeton (1983);
Ein Übersichtsartikel:
P. Fayet, S. Ferrara, Phys. Rep. 32 C (1977) 249.
- [19] Übersichtsartikel:
J.H. Schwarz, Comments on Nucl. Part. Phys. 13 (1984) 103;
und Comments on Nucl. Part. Phys. 15 (1985) 9.

- [20] U.Baur, M. Lindner and K.H. Schwarzer, MPI-PAE/PTh 74/86,
FERMILAB-PUB-86/163-T preprint, to be published in Nucl. Phys. B.
- [21] U. Baur, M. Lindner and K.H. Schwarzer, MPI-PAE/PTh 21-87, to be
published in Phys. Lett. B.
- [22] A. Blondel et. al., CERN-preprint EP/87-50 (1987), auch Proceedings
of LEP 200 ECFA Workshop, Aachen (1986).
- [23] Siehe etwa:
J. Ellis, "Supersymmetric GUT's", in "Quarks, Leptons and beyond",
Proceedings of 1983 NATO ASI in Munich, New York (1985);
W. Lucha, Comments Nucl. Part. Phys. 16 (1986) 155.
- [24] H. Georgi, H.R. Quinn, S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 451.
- [25] J. Gasser and H. Leutwyler, Phys. Rep. 87 (1982) 27.
- [26] Review of Particle Properties, Phys. Lett. 170 B (1986) 74.
- [27] G. Lemaitre, Ann. Soc. Sci. Brux. A 47 (1927) 49;
E. Hubble, Proc. Nat. Acad. Sci. 15 (1929) 169.
- [28] Eine Sammlung wichtiger Artikel:
A. Zee, "Unity of Forces in the Universe", World Scientific, Singapur
(1982).
- [29] H. Georgi, S. Glashow, Phys. Rev. Lett. 32 (1974) 438.
- [30] Siehe etwa:
M. Goldhaber, W.J. Marciano, Comm. Nucl. Part. Phys. 16 (1986) 23.
- [31] In der analytischen Renormierung wird dieser Punkt noch mehr in den
Vordergrund gestellt. Siehe etwa:
E. Speer, J. Math. Phys. 9 (1968) 1404;
E. Speer, "Generalized Feynman Amplitudes", Princeton University
Press (1969).

- [32] J.R. Oppenheimer, Phys.Rev. 35 (1930) 461.
- [33] W. Zimmermann, Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory, Cambridge (1970).
- [34] Siehe etwa:
K. Hepp, "Renormalization Theory" in Proc. Les Houches (1970).
- [35] Siehe etwa: Collins in [4].
- [36] W. Pauli. F. Villars, Rev. Mod. Phys. 21 (1949) 434.
- [37] Siehe etwa:
K.G. Wilson, Phys. Rev. D 7 (1973) 2911.
- [38] F.L. Dyson, Phys. Rev. 75 (1949) 1736.
- [39] J.C. Ward, Phys. Rev. 78 (1950) 182.
- [40] S. Adler, W. Bardeen, Phys. Rev. 182 (1969) 1517.
- [41] Siehe z.B.:
"Symposium on Anomalies, Geometry, Topology", ed. W.A. Bardeen and A.R. White, World Scientific, Singapur (1985).
- [42] L.D. Faddeev, A.A. Slavnov, "Gauge Fields", Benjamin/Cummings, Reading-Massachusetts (1980).
- [43] Ein Übersichtsartikel ist z.B.:
S. Weinberg, Physica 96 A (1979) 327.
- [44] G. Kramer, W.F. Palmer, S.S. Pinsky, Phys. Rev. D 30 (1984) 89.
- [45] Siehe etwa:
J.M. Drouffe, C. Itzykson, Phys. Reports 38 (1978) 133;
W. Marciano, H. Pagels, Phys. Reports 36 (1978) 137;
G. t'Hooft et al., Eds., "Recent Developments in Gauge Theories", Proceedings of 1979 Cargèse Summer Institute, New York-London (1980).

- [46] E.C.G. Stückelberg, A. Petermann, *Helv. Phys. Acta* 26 (1953) 499.
- [47] Diese Konvention stammt aus;
S. Weinberg, *Phys. Rev. D* 8 (1973) 3497.
- [48] Siehe etwa:
B. Lautrup, *Nucl. Phys. B* 105 (1976) 23.
- [49] Siehe etwa:
P.M. Stevenson, "Radiative Corrections in $SU_2 \times U_1$ ", World Scientific, Singapur (1984) und Zitate darin.
- [50] K. Wilson, *Phys. Rev. B* 4 (1971) 3184;
K. Wilson, *Phys. Rev. D* 6 (1972) 419.
- [51] J. Fröhlich, *Nucl. Phys. B* 200 (1982) 281.
- [52] M. Aizenmann, *Phys. Rev. Lett.* 47 (1981) 1.
- [53] J. Glimm, A. Jaffe, *Ann. Inst. H. Poincaré* 22 (1975) 97.
- [54] D. Callaway, R. Petronzio, *Nucl. Phys. B* 240 (1984) 577.
- [55] D.J.E. Callaway, R. Petronzio, *Nucl. Phys. B* 267 (1986) 253;
D.J.E. Callaway, *Nucl. Phys. B* 233 (1984) 189.
- [56] W.A. Bardeen, M. Moshe, *Phys. Rev. D* 28 (1983) 1372.
- [57] Siehe z.B.:
S.S. Schweber, "An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory", Harper & Row, New York (1961).
- [58] L.D. Landau, I. Pomeranchuk, *Dokl. Akad. Nauk USSR* 102 (1955) 489.
- [59] M.B. Einhorn, G.J. Goldberg, *Phys. Rev. Lett.* 57 (1986) 2115.
- [60] A. Zee, *Phys. Rev. D* 7 (1973) 3630;
S. Coleman, D.J. Gross, *Phys. Rev. Lett.* 31 (1973) 851.
- [61] R. Dashen, H. Neuberger, *Phys. Rev. Lett.* 50 (1983) 1897.

- [62] D.J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. D 8 (1973) 3633.
- [63] L. Dolan, R. Jackiw, Phys. Rev. D 9 (1974) 3320;
S. Coleman, R. Jackiw, H.D. Politzer, Phys. Rev. D 10 (1974) 2491.
- [64] D.J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. D 8 (1973) 3633;
T.P. Cheng, E. Eichten, L.-F. Li, Phys. Rev. D 9 (1974) 2259;
D.J.E. Callaway, R. Petronzio, Nucl. Phys. B 267 (1986) 253.
- [65] Siehe etwa [68].
- [66] Siehe etwa:
M.A.B. Beg, C. Panagiotakopoulos, A. Sirlin, Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 883.
- [67] P. Langacker, Comm. Nucl. Part. Phys. (1985).
- [68] P. Langacker, Phys. Rep. 72 (1981) 185.
- [69] Siehe etwa:
M. Gell-Mann, P. Ramond, R. Slansky, Rev. Mod. Phys. 50 (1978) 72.
- [70] Siehe etwa:
T.J. Goldman, D.A. Ross, Nucl. Phys. B 171 (1980) 273.
- [71] L. Maiani, G. Parisi, R. Petronzio, Nucl. Phys. B 136 (1978) 115.
- [72] G. Grunberg, Phys. Rev. Lett. 58 (1987) 1180.
- [73] G. Grunberg, Centre de Physique Théorique – École Polytechnique preprint, March 1987.
- [74] J. Bagger, S. Dimopoulos, E. Massó, Nucl. Phys. B 253 (1985) 397.
- [75] J.W. Halley, E.A. Paschos, H. Usler, Phys. Lett. 155 B (1985) 107.
- [76] H. Komatsu, Prog. Theor. Phys. 67 (1982) 1177.
- [77] K.S. Babu, University of Rochester preprint 277 (1981).

- [78] G.G. Athanasiu, S. Dimopoulos, F.J. Gilman, SLAC-PUB-4069, SLAC-preprint (1986).
- [79] M. Tanimoto, T. Hayashi, R. Najima, S. Wakaizumu, Progr. Theor. Phys. 76 (1986) 1098.
- [80] K. Sasaki, Z. Phys. C 32 (1986) 149.
- [81] C.T. Hill, Phys. Rev. D 24 (1981) 691.
- [82] M.E. Machacek, T. Vaughn, Phys. Lett. 103 B (1981) 427.
- [83] E.A. Paschos, Z. Phys. C 26 (1984) 235.
- [84] E. Ma, S. Pakvasa, Phys. Lett. 86 B (1979) 43.
- [85] C.D. Froggatt, H.B. Nielsen, Nucl. Phys. B 147 (1979) 277.
- [86] S. Dimopoulos, S. Theodorakis, Phys. Lett. 154 B (1985) 153.
- [87] E. Ma, S. Pakvasa, Phys. Rev. D 20 (1979) 2899.
- [88] Die Publikation eines Wertes in dieser Größenordnung durch die UA1-Gruppe am CERN steht angeblich unmittelbar bevor.
- [89] M. Lindner, Z.Phys. C 31 (1986) 295.
- [90] B. Grzadkowski, M. Lindner, Nonlinear Evolution of Yukawa Couplings, Max-Planck-Institut preprint MPI-PAE/PTh 4/87 (1987).
- [91] B. Grzadkowski, M. Lindner, Phys. Lett. B 178 (1986) 81.
- [92] L. Maiani, G. Parisi, R. Petronzio, Nucl. Phys. B 136 (1979) 115.
- [93] Eine Einführung in das 2-Higgs-Standardmodell ist:
 N.G. Deshpande, E. Ma, Phys. Rev. D 18 (1978) 2574;
 Eine Einführung in das supersymmetrische Standardmodell ist:
 H.E. Haber, G.L. Kane, Phys. Rep. 117 (1985) 75.

- [94] S. Glashow, S. Weinberg, Phys. Rev. D 15 (1977) 1958;
E. Paschos, Phys. Rev. D 15 (1977) 1966.
- [95] C.T. Hill, C.N. Leung, S. Rao, Nucl. Phys. B 262 (1985) 517.
- [96] J. Bagger, S. Dimopoulos, E. Massó, Phys. Lett. 156 B (1985) 357.
- [97] A. Bovie, D. Wyler, Phys. Lett. 154 B (1985) 43.
- [98] H.P. Nilles, M. Nussbaumer, Phys. Lett. 145 B (1984) 73.
- [99] K. Tabata, I. Umemura, K. Yamamoto, Phys. Lett. 129 (1983) 80.
- [100] J. Bagger, S. Dimopoulos, E. Massó, Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 920.
- [101] M. Cvetič, C.R. Preitschopf, Nucl. Phys. B 272 (1986) 490.
- [102] K. Inoue, A. Kakuto, H. Komatsu, S. Takeshita, Progr. Theor. Phys. 67
(1982) 1889.
- [103] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. 49 (1973) 273.
- [104] H. Harrari, L. Leurer, Phys. Lett. 181 B (1986) 123.
- [105] Siehe etwa:
W.J. Marciano, A. Sirlin, In "Proc. Second Workshop on Grand Unification", Ed. J.P. Leveille et. al., Birkhäuser (1981).
- [106] T.P. Cheng, E. Eichten and L.-F. Li, Phys.Rev. D 9 (1974) 225.
- [107] M. Fischler, C.T. Hill, Nucl. Phys. B 193 (1981) 53.
- [108] D.R.T. Jones, Phys. Rev. D 25 (1982) 581.
- [109] M.E. Machacek, M.T. Vaughn, Nucl. Phys. B 222 (1983) 83.
- [110] M. Fischler, J. Olensis, Phys. Lett. 119 B (1982).
- [111] I. Jack, H. Osborn, J. Phys. A 16 (1983) 1101.
- [112] M.E. Machacek, M.T. Vaughn, Nucl. Phys. B 236 (1984) 221.

- [113] M.E. Machacek, M.T. Vaughn, Nucl. Phys. B 249 (1985) 70.
- [114] Die Bedeutung von γ_5 für die Renormierbarkeit des Standardmodells ist immer noch nicht vollständig geklärt. Jedoch werden 1-Schleifen-Rechnungen davon nicht berührt.
- [115] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 57 (1976) 657;
S. Glashow, S. Weinberg, Phys. Rev. D 5 (1977) 1958.
- [116] N.K. Falck, Universität Dortmund preprint, DO-TH 85/5 (1985).

Lebenslauf

Ich wurde am 22. Februar 1957 in Ellenfeld als Sohn des Landwirts Josef Lindner und seiner Frau Maria, geb. Schmid geboren.

Nach dem Besuch der Volksschule in Ellenfeld trat ich 1968 in das Stiftland-Gymnasium in Tirschenreuth ein, wo ich im Mai 1977 das Abitur erlangte.

Von Juni 1977 bis September 1978 wurde ich zum Grundwehrdienst einberufen.

Im Wintersemester 1978/79 begann ich das Studium der Physik an der Ludwig-Maximilians Universität in München. Zusätzlich zum Studium absolvierte ich zwei Industriepraktika und war im Herbst 1982 Sommer-Student am CERN in Genf. Im Juli 1984 schloß ich mein Diplom ab. Der Titel der Diplomarbeit war "Schwere Quarkonia und das Gluon-Kondensat".

Seit August 1984 bin ich Doktorand bei Dr. A. Buras am Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik in München.

